COURS

de

STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS,

à l'usage des Élèves de l'École Royale

DE

L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE.

PAR N. PERSY,

Professeur.

2.me Édition.

A METZ.

Lithog: de l'Ecole Royale de l'Artillerie et du Génie.

1827.

Explication des traits et astériques placés en marge du texte.

Les paragraphes dont les titres sont soulignés d'un trait rouge ne devront être étudiés que sommairement.

Ceux dont les titres ou numéros sont accompagnés d'un trait ou d'un astérique noirs ne sont pas exigés.

Cours de Stabilité des Constructions.

Avant-propos.

De la science des constructions.

1). La science des constructions, considérée dans toute son étendue, se fonde sur la plupart des sciences mathématiques et physiques et embrasse un grand nombre des arts qui se rattachent à leurs différentes branches.

De la théorie générale de leur stabilité.

2). Un de ses principaux objets consiste dans l'application de la mécanique soit à la solidité, soit à la stabilité des divers édifices et comprend plusieurs théories; savoir, la résistance des solides, la stabilité des voûtes, des constructions tant en bois qu'en fer, celle des murs de revêtement, des digues &a.

De l'utilité de cette théorie.

3). Sans doute, les usages établis et l'exemple des ouvrages existants ou déjà exécutés, peuvent jusqu'à un certain point suppléer la théorie, du moins s'il ne s'agit que d'ouvrages semblables à ceux-là et qui n'en diffèrent ni dans les dimensions ni dans les poids: mais en ce cas même, on ne connaît ni les efforts que les parties supportent ni les résistances qu'elles opposent: réduit à une routine aveugle, on s'interdit désormais tout perfectionnement, et s'il s'agit d'édifice d'un genre nouveau, sur lequel l'expérience n'ait rien appris, on est dans l'impuissance de l'exécuter ou de concilier l'économie avec la solidité. La théorie au contraire devance l'expérience, elle dirige les Ingénieurs dans l'établissement des constructions quelconques et détermine avec toute l'exactitude nécessaire le degré de résistance dont chaque partie doit être pourvue.

Invention de son principe fondamental par Coulomb.

4). Euler avait énoncé la proposition très-philosophique, qu'il n'est aucune cause naturelle dont l'effet envisagé sous un certain aspect ne soit un maximum ou un minimum; Coulomb imbu de la même idée a ramené à la méthode des maximum et minimum la plupart des théories dont il s'agit et les a soustraites ainsi à l'arbitraire auquel elles avaient été jusqu'alors abandonnées. Le mémoire très-remarquable de ce célèbre Ingénieur a été publié en 1773, dans le tome 7 du recueil des ouvrages présentés à l'Académie, par les savants étrangers.

Nous développerons successivement ces théories d'après les principes de Coulomb et en mettant à profit les recherches des autres Géomètres qui se sont occupés de la même matière.

Théorie de la résistance des Solides.

Préliminaires.

De la théorie particulière de la résistance des solides.

5). On sait que dans un corps solide les molécules intégrantes sont continuellement sollicitées par deux forces contraires qui les maintiennent à certaines distances les unes des autres; savoir, la force d'attraction qui leur est propre, laquelle tend à les rapprocher et la force répulsive du calorique, laquelle tend à les écarter. C'est dans la considération de ces forces, ainsi que de la nature, la forme, la grandeur, la situation et les distances respectives des molécules, qu'on trouve l'explication soit des différents états d'agrégation, soit des diverses propriétés des corps, telles que la compressibilité, l'extensibilité, la flexibilité, l'élasticité &c et qu'on devrait chercher la solution directe des questions relatives à la résistance des solides. Mais, pour cela, il faudrait connaître exactement et les lois qui régissent ces forces et les circonstances qui influent sur leur action.

À défaut de cette connaissance, les Géomètres ont eu recours à des hypothèses plus ou moins vraisemblables et telles que les résultats en fussent non seulement assez simples, mais encore assez conformes aux phénomènes réels, pour qu'on pût les appliquer avec facilité et avec confiance aux différents cas de la pratique.

Coup d'œil rapide sur ses commencements et ses progrès.

6). Galilée à qui l'on doit les premières recherches théoriques sur la résistance des solides et les solides d'égale résistance, a supposé les corps composés de fibres (ou rangées longitudinales de molécules) susceptibles de se rompre, sans extension ni flexion sensibles.

Mariotte (traité du mouvement des eaux, 5.e partie) et Leibnitz (Actes de Leipsick, année 1682) ont regardé les fibres des corps, comme extensibles et capables d'une résistance proportionnelle à leur extension, c'est-à-dire, comme parfaitement élastiques; faisant néanmoins abstraction de la compressibilité dont ces fibres peuvent être douées.

Jacques Bernoulli (Académie de Paris, année 1705) ayant remarqué, comme Mariotte, qu'en général les corps fléchissant avant de rompre, partie des fibres s'étendent et partie se compriment; tandis que d'autres conservent une longueur invariable, proposa d'avoir égard à la compression; désapprouvant d'ailleurs et sans en prescrire d'autre, l'hypothèse de la résistance proportionnelle à l'extension ou à la compression, à cause de la conséquence absurde qu'une fibre pourrait être comprimée plus que

de toute sa longueur. Mais il prit occasion de sa remarque pour déterminer la nature de la courbe qu'affecte une lame élastique en équilibre.

C'est sous le point de vue de Bernoulli que Coulomb a envisagé, dans le mémoire cité, la résistance des solides.

Ces recherches concernaient seulement la résistance qu'opposent à la rupture les corps tirés suivant leur longueur ou soumis à un effort transversal et assujétis de différentes manières; Euler (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes; appendix (*)) ayant perfectionné la théorie des courbes élastiques, qui fut encore approfondie dans la suite par Lagrange, (Académie de Berlin, 1769; de Turin, 1770-1773), en déduisit les moyens de déterminer la résistance qu'opposent à la flexion, les corps pressés suivant leur longueur et d'assigner leur élasticité absolue ou moment d'élasticité, en vertu duquel chaque corps résiste à son inflexion avec plus ou moins d'énergie et qui dépend tant de la nature que de l'épaisseur du corps.

Par rapport aux corps soumis à une action transversale on n'avait considéré que la résistance à la rupture et on ne s'était point occupé de celle qu'ils opposent à la flexion: Mr. Girard jugeant que, dans ce cas comme dans celui des corps pressés suivant leur longueur, c'est principalement la résistance à la flexion qui intéresse l'art des constructions, a ramené aussi le premier de ces cas à la théorie de l'élastique. Son traité publié en 1798, et jusque-là le plus complet, renferme des expériences nombreuses et très-précises sur la force et l'élasticité des bois de chêne et de sapin, avec l'application de la théorie aux résultats que ces expériences ont fournis.

Mr. Duleau dans son essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé a développé la théorie de la résistance à la flexion et a considéré la résistance à la torsion, dont on ne s'était pas encore occupé.

Enfin Mr. Navier qui avait déjà inséré des notes sur la résistance des solides, dans le traité de la construction des ponts, par Gauthey et dans la science des Ingénieurs, par Bélidor, a reproduit avec toute les accroissements qu'elle avait reçus, la théorie de cette résistance, dans son ouvrage intitulé; Application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Cet ouvrage où la théorie a encore acquis un nouveau degré d'extension et a été appliquée à plusieurs appareils de charpente, contient les résultats les plus utiles de la

(*) Voyez aussi, Académie de Berlin, 1757 et Acta Petropolitana, 1778.

expériences faites tant en France qu'à l'étranger, sur la résistance des divers matériaux de construction.

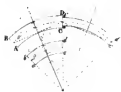
Établissement et discussion de ces principes — Élasticité, flexibilité et extensibilité des corps solides en général.

7). Nous comprendrons dans ces préliminaires l'établissement et la discussion des principes fondamentaux de la théorie.

Tous les corps solides sont élastiques, mais non pas au même degré: les uns reprennent complètement leur forme naturelle, soit subitement, soit dans un tems plus ou moins long; les autres ne se rétablissent jamais qu'en partie. L'élasticité implique deux autres propriétés, la flexibilité et l'extensibilité, qui quoique souvent imperceptibles comme elle, n'en existent pas moins dans tous les corps.

Ces propriétés deviennent apparentes quand le solide a une longueur assez grande par rapport à son épaisseur.

8). Dès qu'un solide, quelle que soit sa nature, a une longueur assez grande par rapport à son épaisseur, il fléchit toujours d'une quantité sensible, avant de rompre, et cette flexion entraîne non seulement une extension, à la partie convexe, mais encore une compression, à la partie concave. Par exemple, une barre de fer forgé, qui donne à peine un indice de flexibilité, sur une longueur moindre que 12 à 15 fois l'épaisseur, est très-flexible, lorsque la première dimension surpasse 40 ou 50 fois la seconde; pareillement une pièce de bois est d'autant plus flexible, que sa longueur surpasse davantage 6 à 7 fois son épaisseur; il en est de même du verre, des pierres et des métaux fondus qui, à moins que la longueur n'excède pas beaucoup l'épaisseur, prennent avant leur rupture, une flexion très-perceptible.

Explication de ce fait.

9). Ce fait s'explique facilement: considérons deux prismes de même matière qui ayant des bases égales et des longueurs différentes, subissent des courbures semblables, ou qui ayant des bases semblables et la même longueur, subissent des courbures égales; dans le premier cas, les flèches de courbure seront proportionnelles aux longueurs et les fibres homologues seront également allongées ou accourcies, mais les fibres extrêmes de celui dont la longueur est moindre le seront davantage; dans le second cas, les flèches de courbure seront égales et les fibres homologues seront inégalement allongées ou accourcies; celles du prisme dont la base est plus grande le seront davantage. Il s'ensuit qu'à égale grosseur le prisme le plus court, ou qu'à égale longueur, le prisme le plus gros rompra sous une moindre flèche de courbure; de sorte que dans la pression longitudinale, un solide s'écrasera, au lieu de fléchir, si sa longueur est assez petite, par rapport aux dimensions de sa base.

De la déperdition d'élasticité.

10). Un autre phénomène auquel il est essentiel de faire attention, c'est que, surtout dans certains corps, l'élasticité s'altère soit par l'augmentation de la force qui les fléchit, soit par la durée de l'action de cette force; sans doute parce que les molécules intégrantes prennent peu à peu de nouvelles positions d'équilibre. L'expérience apprend que les flèches de courbure du bois, particulièrement du chêne, croissent d'abord dans le même rapport que celui des charges qui les produisent et bientôt dans un rapport de plus en plus grand. Ainsi, au-delà d'une certaine flèche de courbure, l'élasticité du bois diminue, quand la charge et parconséquent la courbure augmentent encore; de sorte qu'à l'instant de la rupture, c'est principalement par la force de leur cohésion actuelle, que les molécules résistent à leur séparation. On a souvent observé qu'une pièce de charpente, qui d'abord supporte sa charge sans flexion bien sensible, se courbe de plus en plus, vers son milieu, jusque-là même qu'elle finit par se rompre. Il paraît donc que non seulement l'élasticité, mais aussi la force de cohésion ou la ténacité des molécules diminuent par la durée de l'action de la charge. Les mêmes circonstances se manifestent, mais non pas au même degré, dans un barreau de fer forgé et généralement dans tous les corps solides.

Moyens d'y obvier.

11). Le constructeur, selon la nature des corps qu'il emploie, doit donc mettre entre leur longueur et les dimensions de leur base, un rapport tel qu'ils ne se rompraient que sous une flèche de courbure assez petite relativement à cette longueur; il doit aussi ne les soumettre qu'à un effort tel que la courbure qu'ils prendraient n'altère pas leur élasticité, et ne puisse devenir dangereuse par la suite. Ces règles s'observent effectivement dans la pratique et il en résulte comme on va le voir, que la théorie peut comprendre le cas extrême de la résistance à la rupture, dans celui de la résistance à la simple flexion.

Des matériaux de construction et de leurs formes.

12). Les matériaux essentiels des constructions sont la pierre, le bois et le fer ou fondu ou forgé. Les principales formes sous lesquelles on les met en œuvre sont celles de prismes et de cylindres à axe rectiligne et quelquefois curviligne.

Des différents genres de résistance.

13). Suivant sa destination, un corps mis en œuvre doit résister soit à la compression ou à l'extension ou à la flexion ou enfin à la torsion, soit à la rupture provenant de l'une de ces actions (*).

(*) Les résistances à la rupture causée par l'extension, par la compression et par la pression transversale sont respectivement appelées dans les anciens ouvrages, résistance absolue positive, résistance absolue négative et résistance relative).

Des forces d'élasticité et de ténacité.

14) La résistance d'un corps dépend et de sa force d'élasticité et de sa force de ténacité; qui consistent l'une dans l'effort capable d'accourcir ou d'allonger le corps d'une très-petite quantité, l'autre dans l'effort qu'il faut faire pour l'écraser en le comprimant ou pour le rompre en l'allongeant.

Données que l'expérience doit fournir à la théorie.

15) C'est à l'expérience de rechercher les valeurs de ces deux forces, relativement aux divers matériaux, valeurs dont la connaissance est nécessaire pour déterminer analytiquement soit la quantité dont un corps se comprime, s'allonge ou fléchit sous un effort donné, soit la limite des charges qu'un corps peut supporter sans se rompre. Une autre donnée plus essentielle encore, pour l'application de la théorie, consiste dans la limite des efforts auxquels les solides peuvent être exposés, non pas sans qu'ils se rompent, mais sans que l'altération qu'ils éprouvent, vienne à augmenter avec le tems. Les fibres d'un solide mis en oeuvre sont accourcies ou allongées par l'action des forces qui les sollicitent et l'on peut prendre la proportion de cette variation de longueur pour la mesure du degré d'altération que les fibres subissent; si donc l'on sait quelle est dans les constructions d'une solidité bien constatée, la quantité d'accourcissement ou d'allongement des fibres les plus accourcies ou allongées, on pourra regarder cette quantité comme une limite qu'il est permis d'atteindre, mais qui ne peut être depassée sans danger. En même tems, l'effort qui répond à cet accourcissement ou allongement extrême et qui le produirait directement par compression ou extension, devra être pris pour le plus grand que les fibres puissent supporter, et, en cas de constructions nouvelles, un solide sera censé près de rompre quand cet effort aura lieu. C'est ainsi qu'en substituant dans les formules relatives à la rupture une certaine partie de la ténacité au lieu de la ténacité entière, on les rendra propres au calcul des dimensions qui conviennent à un solide, selon sa destination.

Objet de la théorie.

16). Les déterminations analytiques qui viennent d'être indiquées et qui dans leur généralité, renferment les lois de la résistance, sont l'objet spécial de la théorie.

hypothèses fondamentales sur la résistance 1° à la compression et à l'extension.

17). Puisque d'une part, la nature des matériaux, d'autre part, la forme et les dimensions sous lesquelles on les emploie, sont tels qu'on n'a jamais à considérer que de très-petites variations de longueur et des flexions assez peu grandes, il est permis de regarder leur élasticité comme parfaite et en conséquence de supposer,

relativement à un solide tiré ou pressé suivant sa longueur, mais qui n'éprouve pas de flexion; 1.° que, sous le même poids, les fibres non seulement s'accourcissent ou s'allongent toutes également et chacune uniformément; mais aussi que les quantités d'accourcissement ou d'allongement sont égales; 2.° que ces variations de longueur et les résistances respectives des fibres sont constamment proportionnelles aux poids qui les produisent, depuis les moindres jusqu'à ceux qui produisent enfin la rupture.

2.° à la flexion.

18). La flexion peut provenir d'un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du solide ou parallèlement ou obliquement.

Dans le premier cas, il existera évidemment des fibres qui conserveront leur longueur primitive et seront simplement pliées suivant une surface cylindrique, perpendiculaire au plan passant par l'axe du solide et par la direction de l'effort; tandis que les autres fibres seront non seulement pliées, mais encore allongées ou accourcies et, d'après les hypothèses posées, le seront à proportion de leurs distances à cette surface cylindrique, du côté de la convexité ou du côté de la concavité.

Dans le second cas, d'abord les fibres, à cause de la direction de l'effort seront toutes accourcies; ensuite, par l'effet de la flexion, cet accourcissement diminuera ou même se changera en allongement dans les unes, tandis qu'il augmentera dans les autres; de sorte qu'alors, il pourra bien ne pas exister de fibres qui conservent leur longueur primitive, ou du moins ces fibres auront une autre position dans le solide. Mais afin de simplifier, nous supposerons que cet accourcissement commun, qui d'ailleurs sera toujours très-peu considérable, n'influe pas sur la courbe que le solide affecte, et ce qui a été établi dans le premier cas, sur les fibres de longueur invariable, subsistera dans le cas présent.

Il en sera de même dans le troisième cas: l'effort décomposé parallèlement à la longueur du solide, produira dans les fibres un accourcissement ou un allongement commun, qui sera modifié soit par la flexion soit par la composante perpendiculaire de l'effort; et qui sera supposé aussi n'avoir pas d'influence sur la courbe de flexion du solide.

3.° à la torsion.

19). Quant à la torsion, pareillement censée très-petite, il est naturel de supposer 1.° que, dans chaque section transversale, l'angle de torsion est le même, pour toutes les molécules et qu'il est proportionnel à la distance de cette section à l'extrémité fixe du solide;

2° que de deux molécules contiguës appartenant à une même fibre, celle dont l'angle de torsion est plus grand, résiste à proportion de son déplacement par rapport à l'autre ; déplacement qui est lui-même proportionnel et à la différence des angles de torsion des deux molécules, et à la distance de la fibre à l'axe du solide.

Coëfficients ou valeurs des forces simples d'élasticité et de ténacité.

20) Ainsi donc la variation de la longueur d'un solide tiré ou pressé longitudinalement, sans que la flexion ait lieu, sera proportionnelle à cette longueur, et la valeur de la force élastique simple sera le quotient obtenu, en divisant le poids qui a opéré une variation de la longueur, par la fraction de cette longueur, qui exprime la variation et par l'aire de la section transversale du solide ; ce qui revient au poids nécessaire pour accourcir ou allonger d'une quantité égale à sa longueur primitive, un prisme de même nature que le solide et dont la section transversale serait l'unité superficielle. De même la force simple de ténacité aura pour valeur le poids sous lequel un pareil prisme s'écrase par compression ou se rompt par extension.

Car il est évident que les fibres d'un solide, quelles que soient leur élasticité et leur extensibilité, résistent soit à la compression ou à l'extension, soit à la rupture qui en provient, avec une force proportionnelle à leur nombre, c'est-à-dire, à l'aire de la section transversale du solide.

Nous nommerons respectivement coëfficient d'élasticité et coëfficient de ténacité, les valeurs des deux forces simples qu'on vient de définir.

Les hypothèses que nous admettons sont les plus simples et en même tems les moins éloignées de la vérité, puisqu'elles s'accordent avec l'expérience aussi bien que le permettent le défaut d'homogénéité des matériaux et les accidents de tout genre qui troublent leur constitution physique.

Dans chaque cas de résistance, nous ferons succéder l'expérience à la théorie, afin que l'une puisse au besoin suppléer l'autre et lui fournir immédiatement les éléments nécessaires aux applications.

Exposition de la théorie.

Résistance des Solides à la pression longitudinale et à la rupture qui en provient.

De la résistance des solides, à la compression et à la rupture qui en provient.

21). Le rapport entre la longueur et l'épaisseur des solides est supposé tel que la rupture s'opérerait sans flexion préalable.

Désignons par A le coëfficient d'élasticité ou la force élastique simple, c'est-à-dire, la résistance qu'opposerait un prisme dont la section —

transversale est l'unité superficielle, s'il était accourci ou allongé d'une quantité égale à sa longueur primitive, ou autrement, le poids qui produirait sur le même prisme cette variation de longueur. Soit O l'aire de la section transversale et c la longueur du solide que l'on considère; appelons λ une variation quelconque de cette longueur et P le poids absolu qui la produit, nous aurons (Nº 20) $A = \frac{cP}{\lambda O}$; d'où nous tirerons

$$P = \frac{\lambda A O}{c} \quad \ldots\ldots (1)$$

Quant à la résistance à la rupture, en appelant B le coefficient de ténacité, on aura simplement (Nº 20),

$$P = BO \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Mais la loi exprimée par la première de ces formules ne s'appliquerait rigoureusement qu'à des variations très-petites. Au reste les corps employés dans les constructions ne sont pas susceptibles de compression apparente, même sous l'effort capable de les écraser.

Détermination de la résistance des pierres à l'écrasement, par Coulomb.

22). Coulomb a déterminé, dans le mémoire cité, la résistance à l'écrasement ou à la rupture causée par la compression, pour les solides composés de molécules agglutinées, comme la pierre: soit a le côté $ab = ad$ de la base $abcd$ du prisme ABCD, chargé d'un poids P et coupé par un plan AS faisant avec l'horizon un angle quelconque θ. On trouve sans difficulté qu'eu égard seulement à la cohésion sur la section AS, l'équation d'équilibre est $P\sin\theta - \frac{\gamma a^2}{\cos\theta} = 0$ qui donne

$$P = \frac{2\gamma a^2}{\sin 2\theta} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Le minimum de P répond évidemment à $\theta = 45°$ et ce minimum est

$$P = 2\gamma a^2; \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

d'où réciproquement

$$\gamma = \frac{P}{2a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Autrement: l'action libre du poids P parallèlement à SA sera exprimée par $\alpha = P\sin\theta - \frac{\gamma a^2}{\cos\theta}$; elle sera un maximum et ce maximum sera nul si l'on a les équations $\alpha = 0$, $\frac{d\alpha}{d\theta} = 0$ qui donnent les mêmes résultats que la précédente.

Explication de la rupture singulière d'un cube.

23). On tire de là l'explication de la rupture singulière d'un solide cubique: Perronet, Gauthey et Rondelet ont observé qu'un cube de pierre, soumis à une pression capable de le rompre, se divisait quelquefois en six pyramides ayant son centre pour sommet commun et ses faces pour bases respectives.

Il est permis de supposer que le cube au lieu de s'appuyer sur un plan inébranlable soit repoussé par une force P' égale et contraire

à la pression $P = 2\gamma a^2$. Or il n'y a pas de raison pour que la force P opère la rupture suivant l'une des quatre sections diagonales, telles que AC, exclusivement aux autres et elle est insuffisante pour l'opérer à la fois suivant les quatre tout entières. Mais que l'on partage cette force en quatre autres, égales, qui répondent aux quatre faces de la pyramide supérieure et que l'on décompose chaque force partielle perpendiculairement et parallèlement à la face respective; toutes les composantes seront égales et tandis que les premières solliciteront les pyramides latérales à s'éloigner du centre, les secondes opéreront la rupture suivant les faces de la pyramide supérieure; car si l'on représente la force P par le nombre 8, chacune des composantes sera exprimée par $\sqrt{2}$ ou le quart de $4\sqrt{2}$, valeur de la composante de P, parallèle à AC. D'ailleurs les quatre faces de la pyramide supérieure équivalent ensemble à la section rectangulaire AC; ainsi, une force $\sqrt{2}$, parallèle à une des faces suffit pour vaincre la cohésion sur cette face.

Maintenant ce qui a été dit de la force P doit s'entendre de la force P'; donc la rupture s'opèrera aussi suivant ~~les faces de la pyra~~-mide inférieure et chacune des pyramides latérales sera sollicitée par une seconde force $\sqrt{2}$, symétrique de la première, c'est-à-dire, sera poussée en dehors par une force résultante 2, perpendiculaire à sa base.

Enfin les quatre forces 2, appliquées perpendiculairement aux bases des quatre pyramides latérales, suffisent pour détruire la cohésion sur les faces verticales par lesquelles ces pyramides adhèrent les unes aux autres; car chaque force se décompose en deux égales à $\sqrt{2}$ et perpendiculaires aux faces verticales de la pyramide respective, en sorte que chacune des quatres faces verticales, qui est le quart du rectangle AC est tirée en sens contraire par deux forces égales à $\sqrt{2}$.

A la vérité, les quatre forces 2 pourraient, abstraction faite du frottement, opérer la rupture tout à la fois suivant les sections biaises ac, bd et les sections droites ef, gh; mais dans l'état physique, le frottement existe nécessairement et il opposera plus de résistance à cette dernière rupture qui par conséquent n'aura pas lieu.

S'il s'agissait d'un cylindre à base circulaire, dont la hauteur égalât le diamètre, on trouverait de la même manière, une division en deux cônes de mêmes bases que le cylindre, ayant pour sommet commun le milieu de l'axe, et u un solide intermédiaire,

engendré par la révolution du triangle OBC autour de cet axe, solide divisible lui-même par l'action des forces P, P' suivant deux plans méridiens, rectangulaires, quelconques.

Résultats des principales expériences sur la résistance des corps à l'écrasement; Pierre.

24. Mais en général les notions les plus utiles sur le cas de résistance dont, il s'agit, consistent dans les résultats des principales expériences connues et qui ne concernent guère que la résistance à l'écrasement.

Les expériences les plus remarquables sur la résistance des pierres à l'écrasement ont été faites par Mr. Rondelet, d'abord au moyen d'un levier semblable à celui dont Mr Gauthey s'était servi auparavant (Journal de physique, novembre, 1774) et auquel il a ensuite substitué une vis à pression, qui paraît préférable (art de Bâtir, tome 3, section 2e).

Elles lui ont fourni les indications générales suivantes: on ne peut juger certainement de la résistance des pierres, d'après leurs qualités physiques, telles que la dureté, la pesanteur spécifique, la couleur; on ne la connaît que par des expériences spéciales, mais pour des pierres de même nature, les parties les plus denses offrent plus de résistance. Il y a lieu de distinguer dans les pierres deux qualités principales, relativement à la manière dont elles cèdent à la pression: les pierres dures, dont le grain est fin, l'agrégation homogène et compacte, se divisent avec bruit en lames ou en aiguilles verticales, avant de se réduire en poussière; les pierres tendres se divisent d'abord en pyramides, comme nous l'avons expliqué (N° 23), ensuite ces pyramides se partagent en petits prismes verticaux et enfin tombent aussi en poussière.

Quelques pierres, comme le granit, qui, dans les expériences, l'emportent sur d'autres par la résistance, peuvent éclater plus facilement dans une construction, si elles ne sont pas pressées bien également sur toute l'étendue du joint; ce qui tient à la faiblesse du ciment qui unit entre elles les molécules intégrantes.

Les forces capables d'écraser des prismes de bases semblables sont proportionnelles à ces bases; la force diminue quand l'aire de la base demeurant constante, le contour augmente; elle est la plus grande quand la base est un carré ou un cercle.

Quant au rapport de la hauteur du prisme aux dimensions de la base, il influe sur la résistance de manière qu'elle est la plus grande pour la forme cubique et qu'elle diminue quand la forme devient plus plate ou plus haute. La résistance décroît encore davantage lorsque le prisme est partagé en plusieurs parties dans sa hauteur.

Le lieu que le prisme mis en expérience, occupait dans le bloc de pierre influe aussi sur les résultats : les parties voisines des faces supérieure et inférieure résistent moins que les parties intérieures.

Principaux résultats des expériences de Mr. Rondelet, faites sur des cubes de 0m,05 de côté ou de 25 centimètres carrés de base (tome 1er pag. 208 et suivantes).

Indication des Pierres	Pesanteur spécifique.	Poids produisant l'écrasement
Pierres volcaniques.		Kilogrammes
Basalte de Suède	3,06	47809
Basalte d'Auvergne	2,88	51945
Lave du Vésuve, dite Piperno, près de Pouzzol	2,60	14802
Lave grise des environs de Rome, peu dure, dite Peperino	1,97	5700
Lave tendre de Naples	1,72	4014
Tuf de Rome	1,22	1447
Scorie de Volcan	0,86	831
Pierre ponce	0,60	863
Granits.		
Granit vert des Vosges	2,85	15487
Granit gris de Bretagne	2,74	16353
Granit de Normandie, dit Gatmos	2,66	17555
Granit gris des Vosges	2,64	10581
Grès.		
Grès très-dur, roussâtre	2,52	20337
Grès blanc	2,48	23086
Grès tendre	2,49	98
Pierres argilleuses.		
Pierre pore, ou puante	2,66	17030
Pierre grise de Florence, dont le grain est fin	2,56	10556
Pierres calcaires.		
Marbre noir de Flandre	2,72	19719
Marbre blanc veiné	2,70	7455
Marbre blanc statuaire	2,69	8176
Marbre blanc turquin	2,67	7695
Pierre de Caserte, près de Naples, qui reçoit le poli	2,72	14865
Pierre noire de Saint-Fortunat, employée à Lyon, très-dure et coquilleuse	2,65	15668
Liais de Bagneux, près de Paris, très-dur, d'un grain fin	2,44	11113
Travertino de Rome, très-dur, d'un grain fin, persillé	2,36	7649
Roche de Chatillon, près de Paris, dure, un peu coquilleuse	2,29	4347
Roche douce de Chatillon	2,08	3339
Roche d'Arcueil, près de paris	2,30	6334
Pierre de Saillancourt, près de Pontoise, 1re qualité	2,41	3536
2e qualité	2,29	2994
3e qualité	2,10	2304
Pierre ferme de Conflans, employée à Paris	2,07	2245
Pierre tendre ou lambourde de Conflans, 1re qualité	1,82	1407
Pierre à plâtre de Montmartre, près de Paris	1,92	1765
Vergelée, des environs de Paris, tendre, d'un grain grossier, résistant à l'eau	1,83	1496
Lambourde de qualité inférieure, tendre, résistant mal à l'humidité	1,36	575

Plâtre. 25). Mr. Rondelet a trouvé (tome 1er page 309) que le poids sous lequel écrase un cube de 5 centimètres de côté est, pour le plâtre

gâché à l'eau 1239.Kg

—— au lait de chaux . . . . 1816.

Mortier;

26). La résistance du mortier varie beaucoup, selon les matières employées et les procédés de fabrication. Le tableau suivant présente les résultats des expériences de Mr. Rondelet.

Indication des Mortiers.	Pesanteur spécifique	Poids porté sur une base de 25 centimet. carrés.
Mortier de chaux et sable de rivière	1,63	767 Kg.
le même, battu	1,89	1048
Mortier de chaux et sable de mine	1,59	1017
le même, battu	1,90	1406
Mortier de ciment, ou tuileaux pilés	1,46	1191
le même, battu	1,66	1633
Mortier en grès pilé	1,68	733
Mortier de pouzzolane de Naples et de Rome, mêlés	1,46	916
le même, battu	1,68	1333
Enduit d'une conserve antique des environs de Rome	1,55	1903
Enduit en ciment des démolitions de la bastille	1,69	1368

Les expériences ont été faites 18 mois après la fabrication des mortiers; elles ont été répétées 13 ans après et ont appris que la consistance avait augmenté d'environ $\frac{1}{8}$, pour les mortiers de chaux et sable, et $\frac{1}{4}$, pour les mortiers de ciment et de pouzzolane (tome 1er pag 303).

Bois; pression que le chêne peut supporter sans que la surface se déprime;

27). Suivant les expériences de Mr. Rondelet, la force nécessaire pour écraser un cube en bois de chêne est de 40 à 48 lb, par ligne carrée de la base (385 à 462 Kg par centimètre carré). Elle n'est pas sensiblement plus petite pour un prisme dont la hauteur n'excède pas sept à huit fois l'épaisseur et qui n'est pas susceptible de plier. Pour le bois de sapin, la résistance est de 462 à 538 Kg par centimètre carré, (tome 4, page 67).

Mr. Gauthey (Traité de la construction des Ponts, tome 2, page 44) a observé que l'effort supporté par une pièce de chêne, ne doit pas surpasser 160 ou 200 Kg par centimètre carré, selon qu'il est dirigé perpendiculairement ou parallèlement aux fibres, si l'on veut que la surface du bois n'éprouve pas de dépression sensible.

Fer forgé;

28). D'après les expériences de Mr. Rondelet (Tome 4, page 519) un cube en fer forgé de 6 à 12 li de côté, commence à se déprimer sous une pression moyenne de 513 lb par ligne carrée (6945 Kg par centimètre carré). Le fer cède plutôt en pliant qu'en se déprimant, quand la hauteur est triple de l'épaisseur.

Fer fondu;

29). Résultats principaux des expériences de Mr. G. Rennie (Annales de chimie et de physique, septembre, 1818) sur l'écrasement du fer fondu.

Fer mis en expérience.	Pesanteur spécifique.	Côté de la base Carrée	Hauteur	Poids produisant l'écrasement
		pouce anglais	pouce anglais	livres avoir du poids.
Fer tiré du centre d'une large masse, dont les cristaux avaient la forme et l'apparence de ceux qu'on voit dans la rupture d'un canon même métal . . .	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Fer tiré d'une petite coulée, à grain serré, d'un gris terne	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	2116
			$\frac{3}{8}$	2363
			$\frac{4}{8}$	2005
			$\frac{5}{8}$	1407
			$\frac{6}{8}$	1743
			$\frac{7}{8}$	1594
			$\frac{8}{8}$	1439
Fer tiré de la première masse		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	9773
Cubes tirés de barres coulées horizontalement	7,113	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10114
Cubes tirés de barres coulées verticalement	7,074	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	11137
Prismes de diverses hauteurs en fer coulé horizontalement		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	9449
			$\frac{3}{8}$	9006
			$\frac{4}{8}$	8845
			$\frac{6}{8}$	8362
			$\frac{7}{8}$	6430
			$\frac{8}{8}$	6321
Idem, en fer coulé verticalement		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	9328
			$\frac{5}{8}$	8585
			$\frac{6}{8}$	7896
			$\frac{7}{8}$	7018
			$\frac{8}{8}$	6430

autres Métaux;

3o) Suivant les mêmes expériences, l'effort nécessaire pour écraser un cube en cuivre coulé de . . . . $\frac{1}{4}$ po. ang. de côté est . . 7318 liv. av. du poids

pour comprimer un cube pareil,

en cuivre jaune, de. . . . . $\frac{1}{10}$ 3213

de . . . . $\frac{1}{4}$ 10304

en cuivre battu, de . . . . . . $\frac{1}{16}$ 3427

de. . . . . . . $\frac{1}{8}$ 6440

en étain coulé, de . . . . . . $\frac{1}{16}$ 552

de . . . . $\frac{1}{8}$ 966

en plomb coulé, de . . . . . . $\frac{1}{4}$ 483

Ces nombres et ceux de la dernière colonne du tableau précédent, lorsque le côté de la base est $\frac{1}{4}$ pouce anglais, doivent être multipliés par 1,125 pour donner en kilogrammes la résistance sur un centimètre carré.

Résistance des Solides à l'extension et à la rupture qui en provient.

De la résistance des solides à l'extension et à la rupture qui en provient.

31). La formule (1) restreinte à de petites variations de longueur renferme avec la relation entre l'allongement des solides et l'effort qui le produit ou la résistance qui y répond; pareillement, la formule (2) détermine, en général, la résistance à la rupture provenant de l'extension; mais c'est encore par le moyen de l'expérience qu'il convient d'étudier le cas de résistance, dont il s'agit.

Il n'existe presque aucune expérience directe sur l'allongement des corps en vertu d'un effort donné; cet allongement, comme on le verra dans la suite, peut être conclu des expériences sur la flexion.

Quant à la résistance à la rupture causée par l'extension, elle a été l'objet d'expériences dont nous rapporterons ici les plus utiles.

Résultats des principales expériences sur la résistance des solides à la rupture causée par l'extension. — pierres;

32). Suivant Coulomb (mémoire cité), la force nécessaire pour opérer la rupture sur une surface d'un pouce carré, est, pour une pierre blanche, d'un grain fin et homogène, de 215^{lb} ($14^{k},74$ par centimètre carré); pour la brique de provence, bien cuite et d'un grain très-uni, de 280 à 300^{lb} ($18^{kg},7$ à 20 par centimètre carré).

Plâtre,

33). Mr. Rondelet (tome 1er, page 315) a trouvé que la force de cohésion du plâtre est de 60^{lb} par pouce carré (4^{kg} par centimètre carré). La force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques est environ les $\frac{2}{3}$ de sa propre cohésion. Cette force est plus grande pour la pierre meulière et la brique que pour les pierres calcaires. Elle diminue beaucoup avec le tems.

Mortier;

34). D'après le même auteur, la force de cohésion du mortier est environ $\frac{1}{8}$ de la résistance à l'écrasement; elle est moindre que la force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques.

Mr. Vicat (Recherches expérimentales sur les chaux, page 96) trouve la force de cohésion sur un centimètre carré,

pour les mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux éminemment hydraulique de . . . . $9^{k},6$

Mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux hydraulique ordinaire 6, 0

Mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux communes ou grasses 3, 6

Mortiers mal faits, communément, au plus 1, 5

Bois;

35). D'après les expériences de Mr. Rondelet (tome 4, page 65) la force de cohésion du bois de chêne, tiré dans le sens des fibres, est de 102^{lb}, par

ligne carrée (981.^{kg} par centimètre carré).

Des expériences rapportées par Mr. Navier, (ouvrage cité, page 16) et qui ont été faites sur des pièces d'environ $\frac{1}{3}$ de pouce de diamètre, ont donné ces résultats moyens, ramenés par le calcul à exprimer la force nécessaire pour opérer la rupture sur un pouce carré anglais;

Savoir: Sapin, 1° . . . . 12857 livre av. du poids
2° 11549
Frêne, 1° 17207
2° 16957
Hêtre 11467
Chêne, 1° 9198
2° 11580
Buis 19891
Poirier 9822

Selon les mêmes expériences, l'adhésion latérale des fibres dans le sapin, c'est-à-dire, l'effort nécessaire pour séparer deux partiels d'une pièce, en les faisant glisser l'une sur l'autre parallèlement aux fibres, est de 592 liv. av. du poids, par pouce carré anglais.

D'autres expériences rapportées dans le même ouvrage, page 16, apprennent que la force de cohésion des bois tirés perpendiculairement à la direction des fibres, est, sur un pouce carré anglais, pour le Chêne . . . . 2316 liv. av. du poids
Peuplier 1782
Larix . . . . de 970 à 1700

On trouvera en kilogrammes, la résistance sur un centimètre carré, en multipliant les nombres précédents, par 0,07029.

Fer forgé.

36). Résultats des Expériences de Mr. Perronet (voyez traité de la construction des ponts par Gauthey, tome 2, page 154).

1° Sur des verges de fer carré, tirées dans le sens de la longueur.

Longueur des fers	Equarrissage	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
0,650 m	12,97 m	5972 kg	35,5 kg
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650	9,02	2983	36,7
0,325		3113	38,3
0,650	6,77	2184	46,6
0,325		2369	51,7
0,162		2472	53,9
0,081		2487	54,3
0,650		2159	47,1
Poids moyen par millim. carré			42,9

2.° sur des verges de fer rond, tirées dans le sens de la longueur.

Longueur des Fers	Equarrissage	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimet. carré
mètres	millimètres	Kilogrammes	Kilogrammes
0,650	10,16	3020	37,3
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4
0,081	10,15	3368	41,6
0,650	7,88	2717	55,7
0,162		2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650	7,62	1463	32,1
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1
Poids moyen par millimètre carré			42,2

M.r Rondelet (tome 4, page 500) a fait avec M.r Soufflot sur des verges de fer, tirées dans le sens de leur longueur qui surpassait un peu 2.m, des expériences dont les résultats sont indiqués dans le tableau suivant.

Indication des Fers.	Largeur des pièces	Epaisseur des pièces	Poids produisant la rupture	Poids supporté par ligne carrée.
	lignes	lignes	livres.	livres
Fer tout nerf	2 2/3	2 1/4	3542	590
idem	2 2/3	2	3374	633
Fer dont la cassure offre un peu de grain	6	2 1/2	6157	410
Fer dont la cassure offre les 2/3 de nerf	5	2 1/2	4874	390
Fer moitié nerf	5 1/2	3	5524	335
Fer tout nerf	6	3	15600	866
Fer offrant un tiers de grain	6	3	7800	433
Fer offrant plus de moitié en grain	6	3	5857	325
Fer offrant un peu de grain	3	2	3635	606
Fer tout nerf, de 3 lig. de diamètre			6600	933
Fer à gros grain, sans nerf	4	4	2991	187
Fer à grain moyen, sans nerf	4	4	3980	249
Fer à grain fin, sans nerf	4	4	5840	365
Fer d'un grain moyen, moitié nerf	4	4	7200	450
Fer tout nerf	4	4	10320	645
Fer à gros grain, moitié nerf	4	4	5840	365
Force de cohésion moyenne sur une ligne carrée				486

Ainsi la résistance moyenne est de 46,^{k}78 par millimètre carré.

Résultats des expériences faites par M.r Séguin, aîné, au moyen d'un levier, sur des pièces de fer forgé, tirées dans le sens de la longueur (Des ponts en fil de fer, 2.e édition, page 44 et 400).

Indication des Fers.	Longueur de la pièce	Épaisseur de la pièce	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
	millimètres.	millimètres	Kilogrammes	Kilogrammes
Fer de Saint-Chamond, fait au laminoir . . .	16	8	5611	43,8
idem	10	8	4133	51,7
idem, ayant 0m,01 de diamètre.			3743	48
Fer de Bourgogne	13	13	5226	30,4
idem, chauffé au rouge suant et refroidi lentement	13,5	13,5	5435	29,7
idem, coupé au milieu, soudé bout à bout, sans étirer	13,3	13,3	5280	29,7
idem, coupé au milieu, soudé en sifflet, et étiré . .	10,15	10,15	5688	55,2
idem, plus étirée que la précédente, sans soudure	4,5	4,5	1238	61
Fer dit ruban, très-doux	20,3	1,7	1541	44,7

Fil de Fer.

37). Buffon (Œuvres, partie expérimentale, 4e Mémoire) a rompu deux fils de fer dont le diamètre était de 2,26 millimètres, par une traction de 236 et 242kg; ce qui revient à 60kg par millimètre carré.

Mr. Séguin, aîné, a fait des expériences sur la résistance du fil de fer, tiré suivant la longueur et dont il a calculé les diamètres d'après le poids d'une portion de fil d'un mètre de longueur, en supposant que le mètre cube pèse 7780kg (Des ponts en fil de fer, pages 83 et 100). Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant.

Indication des Fils.	Diamètres	Poids de produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
	millimètres	Kilogrammes	Kilogrammes
Fil de fer de Bourgogne, N.° 8, recuit inégalement . . .	1,172	41,3	38,2
idem, N.° 7, recuit exactement	1,062	31,4	36,1
idem, N.° 18, non recuit.	3,366	508,6	56,8
idem, N.° 7, non recuit.	1,062	65,5	73,7
Fil de l'Aigle, employé pour la carderie	0,2294	3,72	89,8
Passe-perle, assez doux	0,5917	23,6	85,7
Fil provenant d'une manufacture de Besançon, N.° 1, doux.	0,6188	25,96	86,1
N.° 2, doux	0,7078	34,25	87
3, cassant	0,7327	34,12	80,8
4, cassant	0,838	42,3	76,6
5, très-cassant	0,9115	47,25	72,3
6, ...	1,022	62,56	76,1
7.	1,08	65,25	71,2
8, très-cassant	1,123	66,75	67,3
9, assez cassant	1,293	91,74	69,8
10, très-doux	1,435	105.	64,8
11, très-doux	1,476	100,25	58,6
12	1,691	124,8	55,5
13	1,8	145,5	57,2
14, très-doux sans ressort	2,072	166,5	49,3
15	2,226	202	51,9
16, très-doux	2,489	311	63,9
17, pailleux	2,695	389	68,1
18, ...	3,087	617	84
19, ...	3,492	750	78,2
20.	4,14	874,75	65,7
21	4,812	1138	62,5
22, très-cassant	5,449	1579	67,7
23 doux	5,942	1738,5	62,6

Fer fondu.

38). Résultats des expériences du Cᵃ Brown, sur des barreaux carrés (Rapport et mémoire sur les ponts suspendus).

Equarrissage des pièces	Poids produisant la rupture	
pouce angl.	tonnes.	quint.
$1\frac{1}{4}$	11	7
	11	5
	14	
	16	
1	11	10

Le résultat moyen revient à $14^{kg}/2$ pour un millimètre carré

D'après les expériences faites par Mr. G. Rennie (Annales de chimie et de physique, septembre, 1818), sur des pièces carrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, la force de cohésion est, pour

le fer fondu horizontalement . . . . . 1166 liv. av. du poids

verticalement 1218

Divers Métaux.

39). D'après les mêmes expériences, toujours sur des pièces carrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, la force de cohésion est, pour le

Métal de canon dur . . . . 2273 liv. av. du poids

Cuivre battu 2212

Cuivre fondu 1192

Cuivre jaune fin 1123

Etain fondu 296

Plomb fondu . . . . 114.

Cordages.

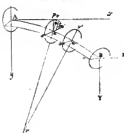
40). Suivant Duhamel (traité de l'art de la corderie), d étant en centimètres le diamètre d'une corde, elle porte moyennement $400\, d^2$ Kilog.

Suivant Coulomb (tome 10 des Savants étrangers, page 285) les cordes blanches portent jusqu'à 50 à 60 Kg par fil de carret; mais on ne doit jamais les charger de plus de 40. Les cordes goudronnées ne portent que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ des cordes blanches.

Résistance des Solides à la flexion et à la rupture qui en provient.

Conditions générales de l'équilibre de résistance.

41). Considérons un solide cylindrique AB, symétrique par rapport à deux plans rectangulaires, passant par son axe et que des forces situées dans l'un des deux plans maintiennent courbé parallèlement à ce plan.

Ces forces seront en général de deux sortes; les unes passives, dues à des points fixes qui assujétissent le solide ou sur lesquels il s'appuie; les autres actives, telles que des poids dont il est chargé ou des pressions qu'il supporte.

D'abord l'équilibre absolu ou de situation exigera que toutes ces forces se réduisent à deux, égales et directement opposées. Ensuite, si l'on con-çoit deux plans infiniment voisins a u v, a'u'v'; normaux à la courbe A a a' B du solide et qui en déterminent une tranche élémentaire quelconque, l'équilibre absolu permettra de regarder l'une des parties extrêmes, savoir, A a u v, comme parfaitement fixe et l'autre B a u v, com-me un système particulier de forme invariable; de sorte que, pour l'équilibre de résistance, les forces appliquées à ce système, y compris la force avec laquelle la partie fixe le soutient lui-même, devront être contre-balancées par les forces de tension et de compression des éléments de fibres, dont la tranche est composée, c'est-à-dire que toutes ces forces devront pareillement se réduire à deux, égales et directement opposées.

Si donc on conçoit dans le plan des forces deux axes quelconques et qu'on décompose parallèlement à ces axes, toutes les forces auxquelles le système particulier se trouve soumis, les conditions de l'équilibre de résistance consisteront en ce que la somme des composantes parallèles à chacun des axes soit nulle et que la somme des moments de toutes les forces par rapport à une droite quelconque perpendiculaire au plan de ces forces soit égale à zéro.

C'est ainsi qu'un corps résiste soit à la flexion soit à la rupture qui en provient et que l'équilibre s'établit entre la résistance et les forces opposées.

Les conditions de cet équilibre sont indépendantes de la loi de la résistance des fibres à l'extension et à la compression; mais on ne pour-rait les exprimer analytiquement sans connaître cette loi; il faut donc recourir aux hypothèses posées précédemment (N.os 17 et 18).

Expression analytique de ces conditions.

48). Nous rapporterons la courbe de flexion, c'est-à-dire, la courbe A a a' B suivant laquelle la surface cylindrique des fibres invariables, est coupée par le plan des forces, aux deux axes que nous avons conçus dans ce plan, qui auront leur origine en un point quelconque A de la courbe et qui supposés l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe du solide considéré dans son état naturel, seront respectivement les axes des x et des y.

Le plan normal a u v coupe la surface cylindrique des fibres inva-riables et le plan des forces suivant deux droites rectangulaires a u, a v parallèlement auxquelles nous prendrons les coordonnées des points de la section normale a u v du solide; la première de ces droites, à laquelle nous rapporterons aussi les moments des forces et que nous appellerons

axe d'équilibre, sera l'axe des abscisses u; la parallèle à la seconde, menée par l'origine a, sera celui des ordonnées v.

Cela posé nommons A et B les coefficients d'élasticité et de ténacité (N°30);

ρ le rayon osculateur ur de la courbe de flexion, au point u par lequel est mené le plan normal auv;

x, y les coordonnées de ce point;

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ les résultantes des forces appliquées à la partie $Ba'a'b'$ du solide, et décomposées parallèlement aux x et aux y;

y', x' les distances de ces résultantes aux axes des x et des y;

U, U' les fonctions de u qui expriment l'ordonnée du contour de la section normale auv, du côté de l'axe d'équilibre, où les fibres sont allongées et du côté où elles sont accourcies;

a la dimension du solide suivant l'axe d'équilibre;

$\mathbf{V}$ la plus grande valeur de U ou de U', c'est-à-dire, la distance à l'axe d'équilibre, de la fibre la plus allongée ou la plus accourcie, lorsque le solide est près de se rompre.

Un élément quelconque de fibre, pris dans la tranche et dont la base est l'élément $mm' = dv\,du$ de la section normale auv du solide, avait primitivement la longueur ds: si cette longueur avait varié d'une quantité égale à elle-même, la résistance de l'élément de fibre serait $A\,dv\,du$; mais la variation effective étant $\frac{v\,ds}{\rho}$, la proportion de cette variation est $\frac{\frac{v}{\rho}ds}{ds} = \frac{v}{\rho}$; donc la résistance s'exprime par $\frac{A}{\rho} v\,dv\,du$ et son moment relatif à l'axe d'équilibre par $\frac{A}{\rho} v^2 dv\,du$.

Ainsi, les sommes des résistances dues aux extensions et contractions des éléments de fibres, dont la tranche est formée, seront respectivement

$$\frac{A}{\rho}\int_0^a du \int_0^U v\,dv \ldots (1), \quad \frac{A}{\rho}\int_0^a du \int_0^{U'} v\,dv \ldots\ldots (2)$$

et la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe d'équilibre, sera

$$\frac{A}{\rho}\left(\int_0^a du \int_0^U v^2 dv + \int_0^a du \int_0^{U'} v^2 dv\right) \ldots\ldots (3)$$

Équation qui détermine en général la position de l'axe d'équilibre.

43). Il faudrait décomposer parallèlement aux axes des x et des y les résistances totales (1) et (2), ou les multiplier chacune alternativement par $\frac{dx}{ds}$ et par $\frac{dy}{ds}$; mais comme la flexion est supposée très-petite ou que $\frac{dx}{ds}$ diffère très-peu de l'unité, on pourra prendre ces résistances elles-mêmes pour leurs composantes parallèles à l'axe des x; d'ailleurs la force $\mathbf{X}$ produit dans les éléments de fibres un allongement ou accourcissement commun qui donne lieu à une résistance égale et contraire à cette force; ainsi la condition que la somme des composantes parallèles à l'axe des x soit nulle, s'exprimera par l'équation

$$\int_0^a du \int_0^U v\,dv = \int_0^\alpha du \int_0^{U'} v\,dv \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

La condition analogue, relative à l'axe des y, ou égard à la résistance de l'axe d'équilibre, c'est-à-dire, à la force avec laquelle la partie $A a u v$ soutient l'autre partie $B a u v$, fournirait une nouvelle équation dont nous n'avons pas besoin.

Mais puisque, par hypothèse, le solide est symétrique relativement aux deux plans rectangulaires longitudinaux xAy, xAC, l'axe d'équilibre au partage aussi la section transversale auv en deux parties symétriques; il suit de là que l'équation (α) qui détermine en général la position de l'axe d'équilibre sur la section transversale, est satisfaite d'elle-même.

Equation générale de l'équilibre de résistance.

44). Il s'ensuit encore que la somme des moments des forces de tension et de compression des fibres, relativement à l'axe au est nulle d'elle-même, et que par conséquent, l'équation des moments ou de l'équilibre de résistance se réduit à

$$\frac{A}{\rho}\left(\int_0^a du \int_0^U v^2 dv + \int_0^\alpha du \int_0^{U'} v^2 dv\right) = -(y'-y)\mathbf{X} + (x'-x)\mathbf{Y} \ldots (4)$$

Expression du moment d'élasticité.

45). L'expression (3) lorsqu'on y fait $\rho = 1$, a pour chaque corps une valeur dépendante tant de la nature de ce corps que de la figure et des dimensions de sa section transversale; on nomme cette valeur moment d'élasticité (*). Nous la représenterons par ε, de sorte que, dans notre hypothèse, nous aurons simplement

$$\varepsilon = 2A\int_0^a du \int_0^U v^2 dv \ldots\ldots\ldots (A)$$

Equation particulière de l'équilibre de résistance à la flexion.

46). En conséquence, l'équation (4) deviendra

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = -(y'-y)\mathbf{X} + (x'-x)\mathbf{Y} \ldots\ldots (B)$$

Cette équation qui exprime les conditions de l'équilibre de résistance à la flexion est celle de la courbe connue sous le nom d'élastique.

Expression du moment de rupture.

47). Si le corps était sur le point de se rompre, la résistance de l'élément de fibre, le plus allongé ou le plus accourci et qui est à la distance $\mathbf{V}$ de l'axe d'équilibre, serait $B\,dv\,du$; ainsi la résistance de l'élément placé à la distance v, sera $\frac{B}{\mathbf{V}}v\,dv\,du$. D'après cela, la quantité (A) prend une autre valeur qu'on appelle moment de rupture; désignons cette valeur par β, nous aurons

$$\beta = 2\frac{B}{\mathbf{V}}\int_0^a du \int_0^U v^2 dv \ldots\ldots\ldots (A')$$

Equation particulière de l'équilibre de résistance à la rupture.

48). Par l'introduction du moment de rupture, l'équation (4) devient

$$\beta = -(y'-y)\mathbf{X} + (x'-x)\mathbf{Y} \ldots\ldots\ldots (B')$$

(*) Cette valeur est aussi appelée quelquefois élasticité absolue.

et exprime alors les conditions de l'équilibre de résistance à la rupture causée par la flexion.

Relation entre les expressions des deux moments.

49). En comparant l'expression du moment de rupture β avec celle du moment d'élasticité α, on reconnaît que l'une se déduit de l'autre par la substitution de $\frac{B}{V}$ à la place de A.

Les constantes A et B se déterminent par le calcul et l'expérience, comme nous l'expliquerons dans la suite.

Distinction de trois cas dans la question générale d'équilibre.

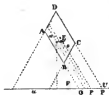
50). Nous remarquerons sur-le-champ que la question générale présente trois cas particuliers, selon que les forces actives qui tiennent le corps fléchi sont dirigées perpendiculairement à la longueur de ce corps ou parallèlement ou obliquement.

Des moments d'élasticité et de rupture des principales sections transversales.

De la détermination des moments d'élasticité et de rupture des principales sections transversales;

51). Mais avant de développer chacun de ces cas, nous déterminerons les moments d'élasticité et de rupture des différentes figures qu'on a coutume de donner à la section transversale des solides, ou qui offriraient le plus d'avantage dans les constructions.

(*) Ces moments ne sont donnés directement par les formules (A) et (A') qu'autant que la figure est rapportée à un axe qui la divise en deux parties symétriques et auquel les ordonnées soient perpendiculaires; en sorte qu'il faut modifier ces formules quand les ordonnées ont une autre direction ou que l'axe a une autre position dans la figure.

Parallélogramme et rectangle rapportés; 1° à un axe quelconque;

52). Considérons d'abord un parallélogramme ABCD, qu'il s'agisse de rapporter à un axe extérieur quelconque OU. Pour simplifier le calcul, nous prendrons les ordonnées v, parallèlement à un côté, savoir, AB, que nous appellerons a. Désignons l'autre côté BC par b, l'ordonnée EF du centre E par c, l'angle ABC entre les côtés a et b par θ, et l'angle AOu entre le côté a et l'axe Ou par φ: les droites AD, BC seront exprimées par les équations

$$U=\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}u+C,\quad U'=\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}u+C',$$

dans lesquelles

$$C=c+\frac{a}{2}-\frac{b\sin(\varphi+\theta)}{2\sin\varphi},\quad C'=c-\frac{a}{2}-\frac{b\sin(\varphi+\theta)}{2\sin\varphi};$$

d'ailleurs l'élément mm' de surface sera exprimé par $\sin\varphi\, dv\, du$; la résistance de l'élément de fibre qui y répond, par $\frac{A}{\rho}\sin^2\varphi\, v\, dv\, du$ et le moment de cette résistance, par $\frac{A}{\rho}\sin^3\varphi . v^2 dv\, du$. On aura donc ici

(*) Cette valeur est aussi appelée quelquefois élasticité absolue.

$$\alpha = A\sin^3\varphi \int_0^{\frac{b\sin\theta}{\sin\varphi}} du \int_{V'}^{V} v^2 dv = \tfrac{1}{3} A\sin^3\varphi \int_0^{\frac{b\sin\theta}{\sin\varphi}} du \left[\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}u + C\right)^3 - \left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}u + C'\right)^3\right] =$$

$$\tfrac{1}{12} A\sin\theta\sin^3\varphi\sin^3(\varphi+\theta)\left\{\left[\left(\frac{b}{\sin\varphi} + \frac{C}{\sin(\varphi+\theta)}\right)^4 - \left(\frac{C}{\sin(\varphi+\theta)}\right)^4\right] - \left[\left(\frac{b}{\sin\varphi} + \frac{C'}{\sin(\varphi+\theta)}\right)^4 - \left(\frac{C'}{\sin(\varphi+\theta)}\right)^4\right]\right\}.$$

Décomposant en facteurs chacune des deux différences de quatrièmes puissances, substituant pour C et C′ leurs valeurs et réduisant, on obtient

$$\alpha = \tfrac{1}{12} A a b\sin\theta\left[(a^2+12c^2)\sin^2\varphi + b^2\sin^2(\varphi+\theta)\right] \text{ et } \beta = \tfrac{1}{6} B a b\sin\theta\,\frac{(a^2+12c^2)\sin^2\varphi + b^2\sin^2(\varphi+\theta)}{(a+2c)\sin\varphi + b\sin(\varphi+\theta)} \ldots (1)$$

à cause de $V = \frac{(a+2c)\sin\varphi + b\sin(\varphi+\theta)}{2}$.

Lorsque la figure est rectangulaire, on a $\sin\theta = 1$, $\sin(\varphi+\theta) = \cos\varphi$ et les expressions deviennent

$$\alpha = \tfrac{1}{12} A a b\left[(a^2+12c^2)\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right], \quad \beta = \tfrac{1}{6} B a b\,\frac{(a^2+12c^2)\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{(a+2c)\sin\varphi + b\cos\varphi} \ldots\ldots (2)$$

2°. à un axe central.

53). Pour que l'axe passe par le centre, il suffira de faire $c=0$, dans les formules précédentes (*). Alors, s'il est parallèle au côté AB, on aura $\varphi = 0$, et s'il est dirigé suivant la diagonale AC, que nous désignerons par d, ou si $\varphi = BAC$, le triangle ABC donnera $b\sin(\varphi+\theta) = a\sin\varphi$, $\sin\varphi = \frac{b\sin\theta}{d}$; il viendra donc

pour le parallélogramme
- axe parallèle à AB . . . $\alpha = \frac{1}{12} A a b^3\sin^3\theta$, $\beta = \frac{1}{6} B a b^2\sin^2\theta$ . . . (3)
- axe suivant AC . . . . $\alpha = \frac{1}{6} A \frac{a^3 b^3\sin^3\theta}{d^2}$, $\beta = \frac{1}{6} B \frac{a^2 b^2\sin^2\theta}{d}$ . . (4)

pour le rectangle . . . .
- axe parallèle à AB . . . $\alpha = \frac{1}{12} A a b^3$, $\beta = \frac{1}{6} B a b^2$ . . . . . (5)
- axe suivant AC . . . . $\alpha = \frac{1}{6} A \frac{a^3 b^3}{d^2}$, $\beta = \frac{1}{6} B \frac{a^2 b^2}{d}$ . . . (6)

Les formules (5) prouvent qu'un prisme rectangulaire, fléchi parallèlement à une face, résiste à la flexion avec une force proportionnelle à sa largeur et au cube de sa hauteur, tandis qu'il résiste à la rupture proportionnellement à sa largeur et au carré de sa hauteur.

Losange et carré.

54). Si l'on fait $b=a$, $c=0$, dans les formules (1), (2) et seulement $b=a$ dans les formules (3), (4) et (5), (6), qui supposent déjà $c=0$, on obtiendra les moments du losange et du carré par rapport à un axe central soit quelconque, soit parallèle à un côté ou dirigé suivant une diagonale: il viendra, à cause de $AC = d = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$, $BD = d' = 2a\cos\frac{1}{2}\theta$, d'où $dd' = 2a^2\sin\theta$,

---

(*) Il vient $\alpha = \frac{1}{12} A a b\sin\theta\left[a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2(\varphi+\theta)\right]$, $\beta = \frac{1}{6} B a b\sin\theta\,\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2(\varphi+\theta)}{a\sin\varphi + b\sin(\varphi+\theta)}$ expressions dans lesquelles les quantités $a\sin\varphi$, $b\sin(\varphi+\theta)$ représentent les projections des deux côtés a et b sur une perpendiculaire à l'axe d'équilibre, projections dont la somme est double de la perpendiculaire à cet axe, abaissée de l'un des deux sommets les plus éloignés.

Pour le losange

axe quelconque	$\alpha=\frac{1}{12}Aa^4\sin\theta\left[\sin^2\varphi+\cos^2(\varphi+\theta)\right]$,	$\beta=\frac{1}{6}Ba^3\sin\theta\,\frac{\sin^2\varphi+\sin^2(\varphi+\theta)}{\sin\varphi+\sin(\varphi+\theta)}$	(7)
axe parallèle à AB	$\alpha=\frac{1}{12}Aa^4\sin^3\theta$	$\beta=\frac{1}{6}Ba^3\sin^2\theta$	(8)
axe suivant AC	$\alpha=\frac{1}{24}Aa^2d'^2\sin\theta$	$\beta=\frac{1}{12}Ba^2d'\sin\theta$	(9)

Pour le carré.

axe quelconque	$\alpha=\frac{1}{12}Aa^4$	$\beta=\frac{1}{6}B\frac{a^3}{\sin\varphi+\cos\varphi}$	(10)
axe parallèle au côté	$\alpha=$ idem	$\beta=\frac{1}{6}Ba^3$.	(11)
axe suivant la diagonale	$\alpha=$ idem	$\beta=\frac{1}{6\sqrt{2}}Ba^3$.	(12)

Ainsi le moment d'élasticité du carré par rapport à un axe central, ne dépend point de la direction de cet axe, et ses moments de rupture par rapport au côté et à la diagonale sont dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Au reste on trouverait directement par les formules (A) et (A') les moments du rectangle et du carré par rapport à un axe central, parallèle à un côté.

Cercle, comparaison avec le carré circonscrit et les rectangles inscrits.

55). Proposons-nous à présent de déterminer les moments d'un cercle par rapport à son diamètre: il n'y aura qu'à évaluer l'intégrale double qui entre dans les formules (A) et (A'). Soit r le rayon et s l'arc variable, mesuré sur la circonférence dont le rayon est l'unité, nous aurons $U^2=2ru-u^2$, $UdU=(r-u)du$; $U=r\sin s$, $dU=rds\cos s$ et $UdU=r^2ds\sin s\cos s=rdU\cos s$, à cause de $r-u=\cos s$; d'où $du=rds\sin s$. D'après cela,

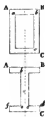
$$\int_0^a du\int_0^U v^2dv=\int_0^a\frac{U^3}{3}du=\frac{2}{3}r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds\sin^4 s=\frac{r^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 4s-\cos 2s-\frac{3}{4}\right)ds=\frac{1}{8}\pi r^4$$

(Lacroix, N°. 200); donc

$$\alpha=\frac{1}{4}A\pi r^4,\qquad \beta=\frac{1}{4}B\pi r^3.\qquad (13).$$

Ainsi, les moments d'élasticité et ceux de rupture du carré et du cercle inscrit sont dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$.

Il est aisé de trouver aussi que de tous les rectangles inscrits dans le un cercle, celui dont la résistance à la rupture est un maximum, est déterminé par la condition $b^2=2a^2$.

Couronne rectangulaire et son inverse; comparaison avec le rectangle.

56). Si la figure est une couronne rectangulaire dont les largeurs et les hauteurs extérieures et intérieures AB, ab et BC, bc soient désignées par a, a' et b, b'; on aura

$$\alpha=\frac{1}{12}A(ab^3-a'b'^3),\quad \beta=\frac{1}{6}B\frac{ab^3-a'b'^3}{b}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (14)$$

Ces expressions subsisteraient encore si les deux parties dans lesquelles la couronne est divisée par l'axe perpendiculaire à celui d'équilibre, étaient renversées et rejointes latéralement; mais alors a' représenterait la somme des largeurs cd, ef.

Pour qu'à égalité de surface, une section rectangulaire xy, présentât la même résistance à la rupture que les sections dont il s'agit, il faudrait qu'on eût,

$$x=\frac{b(ab-a'b')^2}{ab^3-a'b'^3},\quad y=\frac{ab^3-a'b'^3}{b(ab-a'b')}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (15)$$

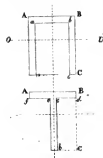
L'aire d'une section rectangulaire demeurant la même, sa résistance à la rupture augmente proportionnellement à sa hauteur ; mais en augmentant cette dimension on ne peut diminuer l'autre au-delà d'un certain terme, parce que le solide manquerait de stabilité et qu'il présenterait trop peu de résistance dans le sens horizontal. Les deux formes précédentes, surtout la première, sont préférables à la forme rectangulaire pleine, malgré la difficulté d'éviter les imperfections dans la fabrication des tuyaux en fer fondu.

Couronne circulaire ; comparaison avec le cercle.

57). Le moment d'une couronne circulaire est la différence entre les moments des deux cercles extérieur et intérieur dont elle est la différence. Soient r', r'' les rayons ; il viendra

$$\alpha=\tfrac{1}{4}A\pi(r'^4-r''^4),\quad \beta=\tfrac{1}{4}B\frac{\pi(r'^4-r''^4)}{r'}\ \ldots\ldots\ldots\ (16)$$

Donc, à égalité de surface, un cercle et une couronne circulaire offrent des résistances à la rupture, qui sont dans le rapport de $(r'^2-r''^2)^{\frac{1}{2}}$ à $\frac{r'^2+r''^2}{r'}$ et, à égalité de résistance, les surfaces sont dans le rapport de $\frac{r'^2+r''^2}{r'}$ à $\left(\frac{r'^4-r''^4}{r'}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Demi-couronne rectangulaire et son inverse.

58). Si l'on considère une moitié seulement de la couronne rectangulaire ou de son inverse, il faut d'abord déterminer la position de l'axe d'équilibre, par la formule (a). Désignant toujours les largeurs et hauteurs intérieures et extérieures AB, ab et BC, bc par a, a' et b, b', appelons γ la distance inconnue AO ; nous aurons $\int_0^a du\int_0^U v\,dv=\frac{1}{2}\int_0^a \gamma^2 du=\frac{1}{2}a\gamma^2-\frac{1}{2}a'(\gamma+b'-b)^2$, $\int_0^a du\int_0^{U'} v\,dv=\frac{1}{2}\int_0^a (b-\gamma)^2 du=\frac{1}{2}(a-a')(b-\gamma)^2$; et en égalant ces deux intégrales

$$\gamma=\frac{1}{2}\,\frac{(a-a')b^2+a'(b-b')^2}{(a-a')b+a'(b-b')}.$$

Ensuite on trouvera $A\int_0^a du\int_0^U v^2dv=\frac{1}{3}A\int_0^a \gamma^3 du=\frac{1}{3}A\left[a\gamma^3-a'(\gamma+b'-b)^3\right]$, $A\int_0^a du\int_0^{U'} v^2dv=\frac{1}{3}A\int_0^a (b-\gamma)^3du=\frac{1}{3}A(a-a')(b-\gamma)^3$; et, en ajoutant ces intégrales,

$$\alpha=\tfrac{1}{3}A\left[a\gamma^3-a'(\gamma+b'-b)^3+(a-a')(b-\gamma)^3\right];\ \text{d'où}\ \beta=\tfrac{1}{3}B\,\frac{a\gamma^3-a'(\gamma+b'-b)^3+(a-a')(b-\gamma)^3}{b-\gamma}\ \ldots (7)$$

On donne l'une ou l'autre de ces figures, et plus fréquemment la seconde, à la section transversale des pièces inclinées, soumises à une pression longitudinale qui, comme dans les piliers-boutants, s'exerce, non suivant l'axe, mais à proximité d'une face.

Figures dont le moment d'élasticité est indépendant de la direction de leur axe d'équilibre.

59). Lorsqu'un solide doit présenter successivement ses différentes faces à un effort dirigé perpendiculairement à sa longueur, ce qui a lieu pour

les axes horizontaux dans les machines de rotation, il convient que la section transversale offre dans tous les sens la même résistance à la flexion. Un cercle plein et une couronne circulaire ont évidemment cette propriété; une figure carrée et par conséquent une couronne de cette figure en jouissent également (N.º 54).

Il en est de même de la figure composée d'un carré et de quatre rectangles égaux, construits symétriquement sur ses côtés et autour de ses axes. En effet, soient a le côté AB du carré, b et a' la largeur bc et la hauteur ab des rectangles additionnels et φ l'angle que le côté ab ou AB fait avec l'axe OU. Par la formule (2) et à cause de $c = \frac{a+a'}{2}$, la somme des moments du rectangle abcd, ou 1, et de son symétrique 2, sera $\frac{1}{6}Aa'b\left\{\left[a'^2+3(a+a')^2\right]\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi\right\}$, et si l'on met $100°-\varphi$ au lieu de φ, celle des deux autres rectangles 3 et 4 sera . . . $\frac{1}{6}Aa'b\left\{\left[a'^2+3(a+a')^2\right]\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right\}$; ajoutant ces sommes au moment $\frac{1}{12}Aa^4$ du carré ABCD, il viendra

$$\alpha=\frac{1}{12}A\left[a^4+2a'b\left(3a^2+4a'^2+6aa'+b^2\right)\right] \ldots\ldots (18)$$

et quand b sera égal à a,

$$\alpha=\frac{1}{12}A\left[a^4+4aa'\left(2a^2+2a'^2+3aa'\right)\right] \ldots\ldots\ldots (19)$$

Passons maintenant à la discussion des trois cas de résistance, que nous avons distingués (N.º 50).

De la résistance des solides à la flexion et à la rupture produites par un effort perpendiculaire à la longueur.

Premier cas de la résistance à la flexion et à la rupture qui en provient.

60). Lorsque la résultante des forces actives est dirigée perpendiculairement à l'axe du solide, la composante X est nulle et les équations générales (B), (B') se réduisent à

$$\alpha\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=Y(x'-x)\ldots(b),\quad \beta=Y(x'-x)\ldots\ldots(c)$$

Solide encastré horizontalement par une des extrémités et chargé à l'autre, d'un poids quelconque.

61). Considérons un solide encastré horizontalement à une extrémité A et chargé d'un poids P, à l'autre extrémité M. Désignons par c la distance horizontale AB des deux extrémités; par f l'ordonnée extrême BM; par s la longueur de la courbe AmM du solide; par ω l'angle que fait avec l'horizon la tangente à l'extrémité M. Puisque, par hypothèse, la flexion demeure toujours très-petite, même jusqu'au degré qui répond à la rupture, il est permis de négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$; en conséquence, l'équation (b) devient $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=P(c-x)$; d'où l'on tire

$$\alpha\frac{dy}{dx}=P\left(cx-\tfrac{1}{2}x^2\right),\ \alpha y=P\left(\tfrac{1}{2}cx^2-\tfrac{1}{6}x^3\right)\text{ et}$$

$$f=\frac{c^3}{\alpha}\,\frac{P}{3},\quad s=c+\frac{2f^2}{5c},\quad \tang\,\omega=\frac{3f}{2c}\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

Mais parce que la rupture tend à se faire dans la section A, pour laquelle $x=0$, et $P(c-x)=$ maximum, l'équation (c) donne

$$P=\frac{\beta}{c}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

ou, en admettant que l'équation de la courbe du solide est $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=P(c-x)$,

$$P=\frac{\beta}{s-\frac{3f^2}{5c}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

Le poids est supposé réparti uniformément sur la longueur du solide.

62). Supposons que tous les éléments de la longueur du solide soient chargés de poids égaux; en appelant u l'abscisse d'un point quelconque pris entre m et M, et p le poids qui répond à l'unité de longueur de l'abscisse; $p\,du$ sera le poids supporté par l'élément dont la projection est du et l'on aura 1° $Y(x'-x)=\int_x^c p(u-x)\,du=p\left(\frac{1}{2}c^2-cx+\frac{1}{2}x^2\right)$; d'où

$$\alpha\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{1}{2}c^2x-\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{6}x^3\right),\quad \alpha y=p\left(\frac{1}{4}c^2x^2-\frac{1}{6}cx^3+\frac{1}{24}x^4\right)\text{ et}$$

$$f=\frac{c^3}{\alpha}\,\frac{cp}{8},\quad \tang\,\omega=\frac{4f}{3c}\;\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

2° à cause de $x=0$, $Yx'=\int_0^c pu\,du=p\frac{c^2}{2}$; d'où

$$\beta=c\,\frac{cp}{2},\quad cp=\frac{2\beta}{c}\;\ldots\ldots\ldots\;(5)$$

expressions dans lesquelles cp est le poids total réparti sur la longueur du solide.

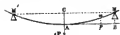
Il suit de la comparaison des valeurs (1) et (4) de f, que si le poids total était appliqué en M, l'abaissement f serait plus grand dans le rapport de 8 à 3; et de la comparaison des valeurs (2) et (5) de P et de cp, que le solide serait également rompu par un poids distribué uniformément sur sa longueur, ou par un poids moitié moindre, suspendu à l'extrémité M.

Manière d'avoir égard au poids du solide.

63). Si le solide étant chargé d'un poids P à l'extrémité M, on veut tenir compte de son propre poids $\Pi=cp$, il viendra (N.os 61 et 62)

$$\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=P(c-x)+p\left(\frac{1}{2}c^2-cx+\frac{1}{2}x^2\right),\quad \beta=cP+p\frac{1}{2}c^2;\ \text{d'où}\ \alpha\frac{dy}{dx}=P\left(cx-\frac{1}{2}x^2\right)+p\left(\frac{1}{2}c^2x-\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{6}x^3\right)\text{ et}$$

$$f=\frac{c^3}{\alpha}\left(\frac{1}{3}P+\frac{1}{8}\Pi\right),\quad \beta=c\left(P+\frac{1}{2}\Pi\right),\quad \tang\,\omega=\frac{3P+\Pi}{8P+3\Pi}\cdot\frac{4f}{c}\;\ldots\ldots\;(6)$$

Solide posé horizontalement sur deux appuis et chargé au milieu.

64). Quand le solide, posé horizontalement sur deux appuis M, M' est chargé en son milieu, les équations précédentes s'appliquent à chaque moitié de la courbe qu'il affecte. Ainsi en nommant 2P la charge, 2c la distance M M' des appuis, 2s la longueur de la courbe entre ces appuis, f la flèche AC de cette courbe et ω l'inclinaison de la tangente en M ou M', on aura

$$f=\frac{(2c)^3}{\varepsilon}\cdot\frac{2P}{48},\ s=c+\frac{2f^2}{3c},\ \text{tang}\,\omega=\frac{3f}{2c}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\beta=cP\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Donc la flèche de courbure est proportionnelle au poids $2P$ et au cube de la distance $2c$.

Ces expressions impliquent que la résistance des appuis est dirigée verticalement, tandis qu'abstraction faite du frottement, elle est normale à la courbe du solide : on verra dans la discussion du second cas comment on pourrait, pour la flexion, avoir égard à cette circonstance.

Quant à la rupture, si l'on observe que la résistance supposée normale se décompose en deux forces P et $P\,\text{tang}\,\omega$, respectivement parallèles aux y et aux x, la formule (B') donnera

$$\beta=P(c+f\,\text{tang}\,\omega)\ \text{ou}\ \beta=cP\left(1+\frac{3f^2}{2c^2}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

en admettant que la courbe du solide est l'élastique du N°. 61.

Le poids est supposé réparti uniformément sur la longueur.

65). Que le poids au lieu d'être concentré dans le milieu A, soit distribué uniformément sur toute la longueur du solide, chaque moitié sera dans le même état que si étant encastrée horizontalement au point A, elle était fléchie en même temps par un poids p pour chaque unité de sa longueur, et par une force contraire cp, appliquée en M ou M' ; par conséquent, on aura

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=cp\left(cx-\tfrac{1}{2}x^2\right)-p\left(\tfrac{1}{2}c^2x-\tfrac{1}{2}cx^2+\tfrac{1}{6}x^3\right);\ \varepsilon y=cp\left(\tfrac{1}{2}cx^2-\tfrac{1}{6}x^3\right)-p\left(\tfrac{1}{4}c^2x^2-\tfrac{1}{6}cx^3+\tfrac{1}{24}x^4\right)\ \text{et}$$

$\beta=cp.c-cp.\frac{1}{2}c$; d'où

$$f=\frac{c^3}{\varepsilon}\cdot\frac{5cp}{24},\ \ \text{tang}\,\omega=\frac{8f}{5c},\ \beta=cp.\tfrac{1}{2}c\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Donc 1° la flèche produite par le poids $2cp$ suspendu au milieu du solide, serait plus grande dans le rapport de 8 à 5, que celle qu'il produit étant réparti uniformément sur la longueur ; 2° le solide serait également rompu par un poids distribué uniformément sur la longueur et par un poids moitié moindre placé au milieu.

Les expressions (4) supposent la résistance de chaque appui, dirigée parallèlement aux y. Pour tenir compte de l'obliquité, quant à la rupture, on remarquera que cette résistance se décompose dans les forces cp et $cp\,\text{tang}\,\omega$, parallèles aux y et aux x, de sorte que par la formule (B'), on aura $\beta=cp.c+cp\,f\,\text{tang}\,\omega-cp.\frac{c}{2}=cp\left(\frac{1}{2}c+f\,\text{tang}\,\omega\right)=\ldots$ $cp.\frac{1}{2}c\left(1+\frac{16f^2}{5c^2}\right)$; d'où

$$2cp=\frac{4\beta}{c+2f\,\text{tang}\,\omega}\ \text{ou}\ 2cp=\frac{4\beta}{c\left(1+\frac{16f^2}{5c^2}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

en admettant que la courbe est celle de l'équation qui a donné les expressions (4).

Ce dernier résultat revient au précédent, pourvu qu'on néglige le carré de $\frac{f}{c}$.

Manière d'avoir égard au poids du solide.

66). Lorsque le solide sera chargé à la fois d'un poids $2P$ au milieu et de son propre poids 2π, on trouvera, en négligeant la considération de la courbure,

$$f=\frac{c^3}{3a}\left(P+\frac{5\pi}{8}\right),\quad \beta=c\left(P+\tfrac{1}{2}\pi\right)\ldots\ldots\ldots (6)$$

Mais si, par rapport à la rupture, on veut considérer cette circonstance, on sera conduit (N.os 64 et 65), aux équations $a\frac{dy}{dx}=\ldots\ldots$ $(P+cp)(cx-\frac{1}{2}x^2)-p(\frac{1}{2}c^2x-\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{6}x^3)$, $\beta=(P+cp)c+(P+cp)f\,\text{tang}\,\omega-cp.\frac{1}{2}c$; d'où l'on tire

$$\text{tang}\,\omega=\frac{3P+2\pi}{8P+5\pi}\cdot\frac{4f}{c}\cdot \text{ et } 2P=\frac{2\beta-\pi(c+2f\,\text{tang}\,\omega)}{c+f\,\text{tang}\,\omega}\ldots (7)$$

expressions dans lesquelles on pourra regarder tang ω comme la même quantité.

Le poids répond à un point quelconque de la longueur.

67). Supposons le poids suspendu à un point quelconque B de la longueur du solide: il est clair que les parties BM, BM' de la courbe sont soumises chacune en particulier à la loi de continuité; or, le point B lui-même est celui de toute la partie BM, où la courbure est la plus grande, c'est-à-dire, où la valeur de $a\frac{d^2y}{dx^2}$ est un maximum, et où par conséquent le solide tend à se rompre. On peut donc regarder cette partie comme encastrée au point de rupture B. Prenons ce point pour l'origine des coordonnées Bp ou x et mp ou y, et c indiquant toujours la moitié CM de l'intervalle entre les appuis, désignons par γ et f les distances horizontale et verticale entre l'origine B et le point C et par φ l'angle que la tangente à cette origine fait avec l'horizon ou avec l'axe des abscisses; les résistances des appuis M et M', abstraction faite de la courbure et du frottement, équivaudront aux composantes verticales $P\frac{c+\gamma}{c}$, $P\frac{c-\gamma}{c}$ du poids $2P$ et l'on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{a}\,\frac{c+\gamma}{c}(c-\gamma-x)$; d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{a}\,\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)x-\tfrac{1}{2}x^2\right]+\text{tang}\,\varphi,\quad y=\frac{P}{a}\,\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]+x\,\text{tang}\,\varphi,\quad f=\frac{P}{a}\,\frac{(c+\gamma)(c-\gamma)^3}{3c}+(c-\gamma)\,\text{tang}\,\varphi.$$

Pour la partie BM' on aura pareillement $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{a}\,\frac{c-\gamma}{c}(c+\gamma-x)$; d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{a}\,\frac{c-\gamma}{c}\left[(c+\gamma)x-\frac{x^2}{2}\right]-\text{tang}\,\varphi,\quad y=\frac{P}{a}\,\frac{c-\gamma}{c}\left[(c+\gamma)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-x\,\text{tang}\,\varphi,\quad f=\frac{P}{a}\,\frac{(c-\gamma)(c+\gamma)^3}{3c}-(c+\gamma)\,\text{tang}\,\varphi.$$

Les quantités f et tang φ doivent avoir les mêmes valeurs dans ces équations qui, par élimination, donneront

$$\text{tang}\,\varphi=\frac{P}{a}\,\frac{2\gamma(c^2-\gamma^2)}{3c},\quad f=\frac{P}{a}\,\frac{(c^2-\gamma^2)^2}{3c}\ldots\ldots\ldots (1)$$

Les parties BM, BM' de la courbe sont exprimées respectivement par les équations

$$y=\frac{P}{a}\,\frac{c+\gamma}{c}\left[\tfrac{2}{3}(c-\gamma)\gamma x+\tfrac{1}{2}(c-\gamma)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right],\quad y=\frac{P}{a}\,\frac{c-\gamma}{c}\left[-\tfrac{2}{3}(c+\gamma)\gamma x+\tfrac{1}{2}(c+\gamma)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right].$$

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la dernière de ces équations, on obtient

$$x = c+\gamma - \sqrt{c^2 + \tfrac{4}{3}\gamma c - \tfrac{1}{3}\gamma^2}\,;$$

Soit f la valeur correspondante de y, ce sera celle de l'ordonnée minimum et $f - f$ sera la flèche de courbure du solide.

Le solide tend à se rompre au point B, où $\alpha \frac{d^2y}{dx^2}$ est un maximum; lorsqu'il est près de se rompre, le moment de la résistance à la flexion, en ce point, est égal au moment de la résistance à la rupture; Or ce maximum est $P\frac{c^2-\gamma^2}{c}$; on a donc

$$\beta = P\frac{c^2-\gamma^2}{c}\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Le poids est distribué uniformément sur une portion de la longueur.

68). Supposons le solide chargé d'un poids p sur l'unité de longueur, mais seulement dans l'intervalle $N\,N'$, dont le milieu B et les extrémités N, N' se projettent en D et E, E'. Indiquant toujours CM et CD par c et γ, désignons DE par c'; les coordonnées Bp, mp, par x, y; l'abaissement BD ou MP du point B, par f et l'angle que la tangente en ce point fait avec l'horizon, par φ. Les résistances des appuis M, M' équivalent aux composantes verticales $c'p\frac{c+\gamma}{c}$, $c'p\frac{c-\gamma}{c}$ de la charge $2c'p$. Or, chaque partie BM, BM' du solide est dans le même état que si, étant encastrée en B, elle était sollicitée dans un sens par une force égale à la résistance de l'appui M ou M', et dans l'autre sens par les poids répartis sur BN ou BN'; donc (N°. 62) on aura d'abord, pour tous les points compris entre B et N, $\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots\ldots$ $\frac{c'p}{\alpha}\,\frac{c+\gamma}{c}(c-\gamma-x) - \frac{p}{\alpha}\left(\frac{c'^2}{2} - c'x + \frac{x^2}{2}\right)$; d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha}\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)x - \frac{x^2}{2}\right] - \frac{p}{\alpha}\left(\frac{c'^2x}{2} - \frac{c'x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \tang\varphi,\quad y = \frac{c'p}{\alpha}\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] - \frac{p}{\alpha}\left(\frac{c'^2x^2}{4} - \frac{c'x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + x\tang\varphi;$$

et en faisant $x = c'$ dans ces équations, on trouvera pour les valeurs propres au point N,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha}\,\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)c' - \frac{c'^2}{2}\right] - \frac{p}{\alpha}\,\frac{c'^3}{6} + \tang\varphi,\quad y = \frac{c'p}{\alpha}\,\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)\frac{c'^2}{2} - \frac{c'^3}{6}\right] - \frac{p}{\alpha}\,\frac{c'^4}{8} + c'\tang\varphi.$$

On aura ensuite, pour tous les points compris entre N et M, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ $\frac{c'p}{\alpha}\,\frac{c+\gamma}{c}(c-\gamma-x)$; d'où l'on tire, en déterminant les constantes de manière que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y, qui répondront à $x = c'$, soient égales aux précédentes,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha}\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)x - \frac{x^2}{2}\right] - \frac{p}{\alpha}\frac{c'^3}{6} + \tang\varphi,\quad y = \frac{c'p}{\alpha}\frac{c+\gamma}{c}\left[(c-\gamma)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] - \frac{p}{\alpha}\left(\frac{c'^3x}{6} - \frac{c'^4}{24}\right) + x\tang\varphi.$$

faisons $x = c-\gamma$ dans cette dernière expression, il en résultera

$$f = \frac{c'p}{\alpha}\,\frac{(c+\gamma)(c-\gamma)^3}{3c} - \frac{p}{\alpha}\left[\frac{c'^3(c-\gamma)}{6} - \frac{c'^4}{24}\right] + (c-\gamma)\tang\varphi.$$

En répétant les mêmes opérations pour l'autre partie BM' du solide, on obtiendra

$$f = \frac{c'p}{\alpha}\,\frac{(c-\gamma)(c+\gamma)^3}{3c} - \frac{p}{\alpha}\left[\frac{c'^3(c+\gamma)}{6} - \frac{c'^4}{24}\right] - (c+\gamma)\tang\varphi;$$

et de ces deux résultats on conclura, par l'élimination,

$$\tang\varphi = \frac{c'p}{\alpha}\,\frac{(4c^2-4\gamma^2-c'^2)\gamma}{6c},\quad f = \frac{c'p}{\alpha}\left[\frac{(2c^2-2\gamma^2-c'^2)(c^2-\gamma^2)}{6c} + \frac{c'^3}{24}\right] \cdots \quad (1)$$

La substitution de cette valeur de $\tang\varphi$ dans les expressions précédentes de y, donnera les équations individuelles des parties BN, NM de la courbe. De ces mêmes expressions, on déduira, par le simple changement de $c+\gamma$ en $c-\gamma$ et réciproquement, celles qui conviennent aux parties BN', NM'; on connaîtra donc également la figure de la courbe partielle BM'. La flèche de courbure se trouvera comme au N.º 67.

Le point B est celui de la plus grande courbure et où le solide tend à se rompre; par conséquent on a

$$\beta = c'p\left(\frac{c^2-\gamma^2}{c} - \frac{c'}{2}\right) \cdots \quad (2)$$

La charge du solide est disposée d'une manière quelconque.

69). De quelque manière que la charge soit disposée sur la longueur du solide, on assignera d'abord la résistance de chaque point d'appui et la position du point de rupture, lequel répond en général au maximum de $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}$ (*) et ici se trouve toujours dans la verticale passant par le centre de gravité de la charge; on formera ensuite autant d'équations différentielles du second ordre qu'il y aura de parties de chaque côté du point de rupture, pour lesquelles les conditions de la flexion ne pourront avoir la même expression. Les constantes introduites par l'intégration se détermineront de manière que l'ordonnée et l'inclinaison de la tangente aient les mêmes valeurs pour le point commun à deux parties consécutives.

La figure de la courbe que le solide affecte étant connue, on exprimera, généralement les conditions de l'équilibre de résistance à la rupture, en égalant le moment de rupture β, à la valeur que prend $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}$ pour le point de rupture, c'est-à-dire, au moment relatif à ce point, des forces qui sollicitent l'une ou l'autre des deux parties séparées par ce même point.

Solide horizontal, encastré à une des extrémités, appuyé par l'autre et chargé d'un poids.

A B N M x 2P y

70. Considérons un solide AMM', encastré horizontalement à l'extrémité A, posé librement à l'extrémité M sur un appui au même niveau que le point A et chargé en M d'un poids $2P$.

Désignons par c, c' les distances AB, AM' et par $2Q$ l'effort exercé sur l'appui M', nous aurons premièrement pour la partie AM de la courbe du solide, $\alpha\frac{d^2y}{dx^2} = 2P(c-x) - 2Q(c'-x)$ et en intégrant

$$\alpha\frac{dy}{dx} = 2P\left(cx-\frac{x^2}{2}\right) - 2Q\left(c'x-\frac{x^2}{2}\right),\quad \alpha y = P\left(cx^2-\frac{x^3}{3}\right) - Q\left(c'x^2-\frac{x^3}{3}\right).$$

(*) Le maximum dont il s'agit n'est pas absolu, mais relatif, c'est-à-dire, compris entre des limites données.

Nous aurons en second lieu, pour la partie MM', $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -2Q(c'-x)$; d'où en intégrant et déterminant les constantes par la condition que, pour $x=c$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y soient égales à celles qui résulteraient des équations précédentes,

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = Pc^2 - Q(2c'x - x^2), \quad \varepsilon y = P\left(c^2x - \frac{c^3}{3}\right) - Q\left(c'x^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

De ce que cette expression de y doit être nulle, quand $x=c'$, on conclut

$$Q = P\frac{c^2(3c'-c)}{2c'^3},$$

c'est la valeur de l'effort exercé sur le point d'appui M'. La substitution de cette valeur dans la même expression et dans celle de $\frac{dy}{dx}$ égalée à zéro, fait connaître l'abscisse e du point dont l'ordonnée est la plus grande et la valeur de cette ordonnée ou de la flèche f de courbure, qui sont

$$e = c'\left(1 - \sqrt{\frac{c'-c}{3c'-c}}\right) \text{ et } f = \frac{P}{\varepsilon}\,\frac{c^2}{3}(c'-c)\sqrt{\frac{c'-c}{3c'-c}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Au point A, on a $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = 2(Pc - Qc') = P\frac{c(c-c')(c-2c')}{c'^2}$, et au point M, $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -2Q(c'-c) = -P\frac{c^2(c-c')(c-3c')}{c'^3}$. C'est au premier de ces points que la courbure est la plus grande ou que le solide tend à se rompre; ainsi l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture est

$$\beta = P\frac{c(c-c')(c-2c')}{c'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Lorsque le poids $2P$ est placé au milieu de l'intervalle AM ou que $c = \frac{1}{2}c'$, il vient

$$Q = \frac{5}{8}P, \quad e = 2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad f = \frac{P}{\varepsilon}\,\frac{c^3}{3\sqrt{5}}. \quad \ldots\ldots (3)$$

La comparaison de cette valeur de f avec celle du N.° 64, montre que, pour un même poids, les flèches de courbure, quand le solide est encastré à ses extrémités ou posé librement sur deux appuis, sont dans le rapport de 1 à $\sqrt{5}$. L'ordonnée du milieu de la longueur, où le poids se trouve, est $\frac{P}{\varepsilon}\,\frac{7c^3}{48}$, c'est-à-dire les $\frac{7}{16}$ de ce qu'elle était (N.° 64).

Dans cette hypothèse sur la position du poids $2P$, la formule (2) se réduit à

$$\beta = P\frac{3c}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

donc, à force égale, le solide peut supporter un poids plus grand dans le rapport de 4 à 3, que si chacune de ses extrémités posait librement sur un appui (N.° 64)

Solide encastré par ses deux extrémités et chargé d'un poids.

71). Que le solide, chargé en M d'un poids $2P$, soit encastré horizontalement par ses deux extrémités A et M'; on pourra, sans changer son état d'équilibre, supposer qu'il porte librement sur un appui par l'extrémité M', et que prolongé au-delà, jusqu'à un point quelconque N, il soutient en ce point une charge telle que la tangente en M' à la courbe qu'il affecte est horizontale. Désignant donc par y, $2c$, y' les

distances AB, AM', AB'; par $2Q$ l'effort exercé sur l'appui M' et par $2Q'$ le poids suspendu en N; nous aurons d'abord, pour la portion AM de la courbe du solide, $\alpha\dfrac{d^2y}{dx^2}=2P(\gamma-x)-2Q(2c-x)+2Q'(\gamma'-x)$, et en intégrant,

$$\alpha\frac{dy}{dx}=P(2\gamma x-x^2)-Q(4cx-x^2)+Q'(2\gamma'x-x^2);\quad \alpha y=P(\gamma x^2-\tfrac{1}{3}x^3)-Q(2cx^2-\tfrac{1}{3}x^3)+Q'(\gamma'x^2-\tfrac{1}{3}x^3)\ldots(1)$$

Nous aurons ensuite pour la portion MM' de la courbe, $\alpha\dfrac{d^2y}{dx^2}=\ldots$ $-2Q(2c-x)+2Q'(\gamma'-x)$, et en déterminant les constantes d'intégration de manière que, pour $x=\gamma$, les valeurs de $\dfrac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui résulteraient des équations précédentes (1),

$$\alpha\frac{dy}{dx}=P\gamma^2-Q(4cx-x^2)+Q'(2\gamma'x-x^2),\quad \alpha y=P(\gamma^2x-\tfrac{1}{3}\gamma^3)-Q(2cx^2-\tfrac{1}{3}x^3)+Q'(\gamma'x^2-\tfrac{1}{3}x^3)\ldots(2)$$

Or, le coefficient $\dfrac{dy}{dx}$ et l'ordonnée y doivent être nuls au point M', qui répond à $x=c$; d'où l'on conclut $P\gamma^2-4Qc^2+4Q'(\gamma'c-c^2)=0$, ... $P(2\gamma^2c-\tfrac{1}{3}\gamma^3)-Q.\tfrac{16}{3}c^3+4Q'(\gamma'c^2-\tfrac{2}{3}c^3)=0$; et

$$Q=P\frac{\gamma^2(\gamma c-\gamma\gamma'-4c^2+3\gamma'c)}{4c^3(\gamma'-2c)},\quad Q'=P\frac{\gamma^2(2c-\gamma)}{4c^2(\gamma'-2c)};$$

valeurs dont la substitution dans les équations (1) et (2) fera connaître la figure du solide, indépendamment de γ' qui disparaîtra de lui-même.

Si la charge $2P$ répondait au milieu de l'intervalle AM', ou qu'on eût $\gamma=c$, il viendrait

$$Q=P\frac{2\gamma'-3c}{4(\gamma'-2c)},\quad Q'=\frac{c}{4(\gamma'-2c)}.$$

Substituant dans les équations (1), après y avoir fait $\gamma=c$, on a, pour la première moitié de la courbe,

$$\alpha\frac{dy}{dx}=P\left(\frac{cx}{2}-\frac{x^2}{2}\right),\quad \alpha y=P\left(\frac{cx^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)$$

et l'on trouve que, par les mêmes substitutions, les équations (2) donnent, pour la seconde moitié, une figure symétrique de celle de la première.

L'ordonnée du milieu de la courbe ou la flèche de courbure, est

$$f=\frac{P}{\alpha}\cdot\frac{c^3}{12}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

c'est-à-dire, quadruple de celle qu'on a trouvée (N.° 64), quand le solide était posé librement sur deux appuis.

Dans l'hypothèse actuelle, la courbure est la plus grande aux deux extrémités et au milieu du solide, qui tend à se rompre en même tems à ces trois points; par conséquent l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture est

$$\beta=P\frac{c}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Ainsi le poids supporté par le solide encastré à ses deux extrémités, est double de celui que ce solide supporte (Nº 64), lorsqu'il est simplement appuyé.

Solide supporté par trois ou un plus grand nombre de points d'appui.

72. On sait que si une ligne inflexible, chargée de poids, s'appuie sur plus de deux points, les pressions que les points d'appui peuvent supporter sont indéterminées, mais entre des limites assignables par les principes de la statique; il n'en est pas de même lorsque la ligne est élastique: alors l'indétermination cesse tout-à-fait. Nous nous proposerons une des plus simples questions de ce genre.

Un solide posé horizontalement sur trois points d'appui, qui répondent au milieu A et aux extrémités M, M' de sa longueur, supporte des poids P, P' dans les milieux N, N' de ses deux moitiés; il s'agit de déterminer les pressions que les appuis souffrent et la figure que le solide affecte. Désignons par c la demi-longueur AM ou AM'; par p, q, q' les résistances des appuis A, M, M' et par ω l'angle que fait avec l'axe Ax, la tangente à la courbe au point A.

L'équilibre absolu ou de situation (Nº 41) exige 1º que la somme des forces tant actives que passives se réduise à zéro; 2º que la somme des moments de ces forces par rapport à un point quelconque, savoir, le point A, soit nulle; ce qui donne

$$P+P'=p+q+q'; \quad P-P'=2(q-q') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Maintenant, le solide pouvant être regardé comme encastré en A, on aura d'abord pour la partie AN, $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=P\left(\frac{c}{2}-x\right)-q(c-x)$ et en intégrant,

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=P\left(\frac{cx}{2}-\frac{x^2}{2}\right)-q\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)+\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\omega,\quad \varepsilon y=P\left(\frac{cx^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)-q\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\varepsilon x\,\mathrm{tang}\,\omega \ldots (2)$$

On aura ensuite pour la partie NM, $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-q(c-x)$ et en déterminant les constantes d'intégration par la condition que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y, qui répondront à $x=\frac{c}{2}$, soient égales à celles qui résultent semblablement des équations (2)

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=-q\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)+P\frac{c^2}{8}+\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\omega,\quad \varepsilon y=-q\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\left(P\frac{c^2}{8}+\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\omega\right)x-P\frac{c^3}{48} \ldots (3)$$

Les équations relatives aux parties AN', N'M' de la courbe, se déduisent des précédentes (2) et (3), par la substitution de P' à P, de q' à q et le changement du signe de tang ω. Or, les équations des parties NM, N'M', doivent donner $y=0$, quand $x=c$; il viendra donc

$$-q\frac{c^2}{3}+P\frac{5c^2}{48}+\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\omega=0,\quad -q'\frac{c^2}{3}+P'\frac{5c^2}{48}-\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\omega=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

d'où et des équations (1), on tire

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{P-P'}{\lambda}\,\frac{c^2}{32},\ p=\frac{22P+22P'}{32},\ q=\frac{13P-3P'}{32},\ q'=\frac{-3P+13P'}{32}\ \ldots\ldots\ (5)$$

Ces valeurs prouvent que les efforts exercés sur les appuis sont indépendants de λ ou demeurent les mêmes, quelle que soit la flexibilité du solide, et que l'appui A supporte seul à très-peu près les $\frac{2}{3}$ de la charge totale. En les substituant dans les équations (2) et (3), on connaîtra complètement la figure du solide.

C'est au point A que la courbure est la plus grande et que le solide tend à se rompre; égalant donc β à la valeur de $\lambda\frac{d^2y}{dx^2}$, qui répond à ce point, on aura, pour l'équilibre de résistance à la rupture, l'équation

$$\beta = \frac{3P+3P'}{32}\,c\ \ldots\ldots\ (6)$$

Dans l'hypothèse $P'=P$, il vient

$$\operatorname{tang}\omega = 0,\ p=\frac{22P}{16},\ q=q'=\frac{5P}{16}\ \ldots\ldots\ (7)$$

et

$$\beta = \frac{3P}{16}\cdot c\ \ldots\ldots\ (8)$$

Chaque moitié du solide est dans le même état que si elle était encastrée horizontalement à une extrémité et appuyée librement à l'autre; car l'expression (8) quand on y écrit 2P et 2c au lieu de P et c, revient à l'expression (6) du N° 70.

Formules générales de la résistance à la rupture, selon Galilée et selon Mariotte et Leibnitz.

73). Il n'est pas difficile de trouver les formules générales de la résistance à la rupture, selon les principes de Galilée et de Mariotte et Leibnitz.

Galilée plaçait l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section de rupture et regardait la force intérieure développée en chaque point de cette section comme constante pour tous les points. Désignant donc par B la résistance sur l'unité superficielle; par a la longueur de la section; par b sa hauteur; par U, U' les ordonnées du contour relatives à l'abscisse u et par β le moment de la résistance à la rupture, on a

$$\beta = B\int_0^a du \int_{U'}^{U} v\,dv\ \ldots\ldots\ (1)$$

expression qui, lorsque la section est rectangulaire, devient

$$\beta = B\,\frac{ab^2}{2}\ \ldots\ldots\ (2)$$

Selon la théorie attribuée à Mariotte et Leibnitz, l'axe horizontal d'équilibre passe pareillement par le point inférieur de la section, mais la force intérieure développée en chaque point est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe d'équilibre; on a donc en général

$$\beta = \frac{B}{b}\int_0^a du \int_{U'}^{U} v^2 dv\ \ldots\ldots\ (3)$$

et pour le rectangle

$$\beta = B\frac{ab^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Les valeurs (2) et (4) de β sont dans le rapport de 3 à 2.

Usage des formules obtenues.

74). Les formules qui viennent d'être exposées serviront à déterminer la résistance qu'opposent à la flexion ou à la rupture, les corps assujettis d'une manière quelconque et sollicités par des forces perpendiculaires à leur longueur.

Pour appliquer ces formules à un solide donné, il faudra y substituer, à la place de α ou de β, la valeur du moment d'élasticité ou de rupture, qui convient à la figure de la section transversale du solide et qui s'obtient par les expressions données, (N.os 52 et suivants). On attribuera ensuite aux constantes A et B qui entrent dans ces expressions, les valeurs propres à la nature du solide et qui doivent être déterminées par l'expérience. On appreciera ainsi, soit le degré de flexion de ce solide sous une charge donnée, soit la charge qui pourrait causer sa rupture.

De la détermination des coefficients d'élasticité et de ténacité; formules.

75). Les expériences les plus propres à la détermination des coefficients A et B, consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu par des poids de plus en plus grands et à observer ou la flèche de courbure produite par chaque poids ou seulement le poids et la flèche de courbure, sous lesquels la rupture est près de s'opérer.

Lorsque la section transversale sera un rectangle d'une longueur a et d'une hauteur b, on aura (N.º 53) $\alpha = A\frac{ab^3}{12}$, $\beta = B\frac{ab^2}{6}$ et (N.º 64), abstraction faite du poids du solide, $f = 2P\frac{(2c)^3}{48\alpha}$, $\beta = cP\left(1+\frac{3f^2}{2c^2}\right)$; d'où résulte, quant à la flexion,

$$f = 2P\frac{(2c)^3}{4Aab^3}, \quad A = 2P\frac{(2c)^3}{4ab^3f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et quant à la rupture,

$$B = 2P\frac{3c}{ab^2}\left(1+\frac{3f^2}{2c^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$2c$ étant l'intervalle des appuis et $2P$ le poids posé sur le milieu de la longueur du solide.

Si l'on veut avoir égard au poids 2π du solide, il faut, suivant la formule (6) du N.º 66, ajouter $\frac{5}{8}.2\pi$ à $2P$ dans les formules (1) et employer au lieu de l'expression précédente de β, les expressions (7) du N.º 66; on aura ainsi, pour la flexion,

$$f = \left(2P+\frac{5}{8}.2\pi\right)\frac{(2c)^3}{4Aab^3}, \quad A = \left(2P+\frac{5}{8}.2\pi\right)\frac{(2c)^3}{4ab^3f} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

et pour la rupture,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{3P+2\pi}{8P+5\pi}\,\frac{4f}{c}, \quad B = \frac{(2P+2\pi)(c+f\operatorname{tang}\omega)-c\pi}{\frac{1}{3}ab^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Soit $2P'$ un autre poids et f' la flèche de courbure, qui lui répond ; l'une ou l'autre des formules (3), donnera indépendamment du poids 2π du solide,

$$A=(2P'-2P)\frac{(2c)^3}{4ab^3(f'-f)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

ainsi, il suffira de connaître l'accroissement de la flèche de courbure, qui répondra à un accroissement donné du poids et l'on n'aura pas besoin des valeurs absolues de la flèche et du poids primitifs.

Quand les solides auront peu de longueur ou ne prendront qu'une petite flèche de courbure à l'instant de la rupture, on pourra négliger dans l'expression (2) de B et dans celle qui provient de l'élimination de tang(ω), entre les formules (4), le terme du second ordre $\frac{f^2}{c^2}$, introduit par la considération de cette courbure. On aura donc, selon qu'on fera ou non abstraction du poids du solide,

$$B=2P\frac{3c}{ab^2}\ , \quad B=(2P+\pi)\frac{3c}{ab^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Résultats des principales expériences sur la résistance des corps pressés transversalement ; 1°. à la flexion.

76). Nous rapporterons d'abord les résultats de celles des expériences indiquées (N°. 75), qui doivent servir à déterminer les valeurs du coefficient A, relativement à divers corps. Pour obtenir ces valeurs avec exactitude, il faut que la flexion ait été fort petite ; car dès que l'extension ou la compression des fibres, approche du terme de la rupture, la résistance de ces fibres peut cesser d'être exactement proportionnelle à leur allongement ou leur accourcissement, comme on l'a supposé (N.os 17 et 18) ; ce qu'on exprime en disant que l'élasticité est altérée.

Bois.

77). Résultats des expériences de Duhamel (Académie des sciences, 1768), concernant la flexion de pièces de chêne, posées horizontalement sur deux appuis et chargées au milieu de la longueur. La distance des appuis est 23^{pi} et la charge 7591^{liv}

Largeur des pièces	hauteur des pièces	Flèche de la Courbure
pouces.	pouces.	pouces
10	9	3 ½
10	11 ½	2 ½
12	13	1

En employant la formule (3) du N°. 75, on conclut de ces expériences, que la valeur moyenne du coefficient A, pour le bois de chêne est

$$A=1\,012\,000\,000^{kg} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids.

Il en résulte qu'une pièce de chêne, supportant une tension longitudinale de 1.^{kg} sur chaque millimètre carré, s'allonge de $\frac{1}{1012}$.

Résultats moyens des expériences faites par Mr. Ch. Dupin (Journal de l'Ecole Polytechnique, 17^e cahier), sur diverses espèces de bois. L'intervalle des appuis était de 1.^{m}

Bois soumis à l'expérience	Largeur des pièces	Hauteur des pièces	Charge au milieu	Flèche de Courbure
	mètre	pièces	Kilogram	mètre
Chêne de démolition, 25 ans de coupe	0,03	0,03	4	0,00585
Cyprès, un an de coupe	0,03	0,03	4	0,0072
Hêtre, un an de coupe	0,03	0,03	4	0,0089
Sapin de démolition, 25 ans de coupe	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0072
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,007
	0,05	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,005

La première expérience, sur le bois de chêne, donne pour le coefficient A, la valeur

$$A = 1\,688\,000\,000^{kg} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Les expériences sur le bois de sapin donnent moyennement,

$$A = 1\,029\,000\,000^{kg} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Résultats moyens des expériences faites sur des pièces de bois de chêne et de sapin, par Mr Rondelet (tome 4, page 314). L'équarrissage était de 1 po.

Bois soumis à l'expérience	Intervalle des appuis	Charge au milieu	Flèche de Courbure
	pouces	livres	lignes
Chêne . . .	42	100	11,5
Sapin . . .	42	100	11

Il suit de ces expériences que la valeur moyenne du coefficient A, pour le chêne et pour le sapin, est environ

$$A = 1\,300\,000\,000^{kg} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Fer forgé.

78). Le tableau suivant est formé d'après les expériences faites par Mr. Duleau (Essai théorique &c) sur des pièces de fer forgé, posées horizontalement et chargées au milieu. Les résultats sont ramenés par le calcul à la charge constante de 10.^{kg}

Pièces soumises à l'Expérience	Intervalle des appuis	Largeur des pièces	Hauteur des pièces	Flèche de courbure
	mètres.	millimèt.	millimèt.	millimèt.
Fer du Périgord. La section transversale est un triangle équilatéral, de 0m038 de côté.	3			7,6
(La flèche est la même en posant la pièce sur une face ou une arête)				
Fer du Périgord	1	61,	5,5	12,57
Même pièce	0,5	61	5,5	1,71
Fer d'Angleterre, tel qu'il sort des grosses forges . . .	3,035	34	8,56	136
Même pièce	3,075	8,56	34,	13,5
Fer du Périgord	2	30	11	24
Même pièce	1	30	11	3
Fer du Périgord, doux (destiné pour des fers de chevaux)	2	70	11,2	9,5
Fer du Périgord, ...	1	68	11	1,5
idem (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	2	45	12	12
Fer du Périgord	2	40	11,5	21
Même pièce	1	40	11,5	2,5
Même pièce	2	11,5	40	1,67
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge) . .	3	77	14	14,4
Fer d'Angleterre, marqué B (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	1,5	67,8	14,7	2
Fer du Périgord	3	25	15	37
Même pièce	3	15	25	14
Fer du Périgord	1	58	16,3	0,57
idem	3	39	19,6	10,8
Même pièce	3	19,6	39	2,8
Fer du Périgord	2	60	20	2
idem	3	60	20	6,6
Même pièce	3	20	60	0,75
Fer du Périgord	5	120	20	15
Fer des Landes	2	120	21	1
Fer du Périgord	3	39	24,5	6
Même pièce	3	24,5	39	2,33
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	3	67	26	2,3
Fer du Périgord	5	108	30	4,75
Même pièce	5	30	108	0,4
Fer du Périgord	2,92	31	31	3
La même pièce posée sur une arête				3,35
		Diamètre en millimètres		
Fer rond de l'Arriège, tel qu'il sort des grosses forges . .	3,69	21,49		48,25
idem	2,99	21,51		27,5
Fer rond anglais, idem	2,935	23,52		18
Fer rond de l'arriège, idem	2,92	26,82		10
Fer rond de Bilbao, très-doux	2,92	31,8		5

Il résulte généralement de ces expériences (page 54 de l'ouvrage cité) que la valeur moyenne du coefficient A, qui convient au fer forgé est

$$A = 20\,000\,000\,000^{kg} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

le mètre et le kilogramme étant toujours les unités de longueur et de poids.

Si avec cette donnée on calcule par la formule (3) du N°. 75, les flèches de courbure; les plus grandes différences entre le calcul et l'expérience ne dépassent pas $\frac{1}{4}$ en plus ou en moins.

On conclut du résultat général (1) qu'une pièce de fer forgé, supportant une tension de 1^{kg} sur chaque millimètre carré de la section transversale s'allonge de $\frac{1}{20000}$.

Acier.

79). Résultats moyens des expériences du même Auteur, sur des pièces d'acier, posées horizontalement et chargées au milieu. Les flèches de courbure répondent, comme dans le tableau précédent, à une charge de 10^{kg}.

Pièces soumises à l'expérience	Intervalle des appuis.	Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Flèche de courbure.
	mètres	millimètres	millimètres	millimètres
Acier fondu d'Angleterre, marqué Huntsman . . .	0,98	13,3	5,9	32,05
Même pièce	0,98	5,9	13,3	8,4
Acier de cémentation, d'Allemagne, marqué Fortman, pour des rasoirs	0,68	14,5	7,8	8
Même pièce	0,68	7,8	14,5	2,1
Acier de même espèce	1,845	25,7	21,6	2,8
Même pièce	1,845	21,6	25,7	2,2
Acier de même espèce	1,845	28,5	21,9	2,6
Même pièce	1,845	21,9	28,5	1,8
Acier de même espèce	1,35	54,8	25,5	0,55
Même pièce	1,35	25,5	54,8	0,27
Acier de même espèce	1,35	52	26,6	0,5
Même pièce	1,35	26,6	52	0,3

Selon ces expériences, la résistance de l'Acier à la flexion est moindre que celle du fer et les résultats offrent moins de régularité.

Fer fondu.

80) Résultats moyens des expériences faites par Mr. Rondelet (tom. IV, page 514), sur des barres de fer fondu, posées horizontalement et chargées au milieu. Toutes ces barres ont 1^{po} d'équarrissage.

Pièces soumises à l'expérience	Intervalle des appuis	Charge au milieu	Flèche de courbure
	pouces	livres	lignes
Fonte grise	42	312	5,5
Fonte douce	42	312	4,6
Fonte grise	21	450	1
Fonte douce	21	450	1,875

La valeur moyenne du coefficient A, résultante des expériences sur la fonte grise, est

$$A = 9\,029\,000\,000^{kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et celle qui résulte des expériences sur la fonte douce est

$$A = 10\,653\,000\,000^{kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Résultats des principales expériences sur la résistance des corps chargés transversalement; 2°. à la rupture. — Bois.

81). Exposons maintenant les résultats des expériences du second genre, indiquées (N°. 75), c'est-à-dire, qui concernent la rupture des corps pressés perpendiculairement à leur longueur et au moyen desquelles on peut déterminer les valeurs du coefficient B.

Le tableau suivant présente les résultats moyens des expériences de Buffon (histoire naturelle, partie expérimentale, 11e Mémoire) sur le bois de chêne nouvellement abattu. L'intervalle des appuis que nous avons désignés dans la théorie par 2c était moindre de $\frac{1}{12}$ que les longueurs des pièces.

Equarrissage des pièces	Longueur des pièces	Poids des pièces	Charge au milieu, qui a rompu.	Flèche à l'instant de la rupture	
pouces	pieds.	livres.	livres	po.	lig.
4	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	3308	3	3
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5300	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3700	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	3
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950		
	8	148	15525	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	11250	3	3
	12	223	9100	4	1

	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7.	8	203	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2
	14	351	13225	3	11
	16	405	11000	5	0
	18	452	9245	5	8
	20	503	8375	8	2
8	10	331	27750	2	8
	12	396	23450	3	0
	14	460	19775	3	6
	16	526	16375	4	6
	18	594	13200	4	3
	20	662	11487	6	3

En calculant la valeur de B par la formule (4) du N°. 75, au moyen des données de l'expérience sur une pièce de 6^{po} d'équarrissage et de 10^{pi} de longueur, on trouve

$$B = 5\ 862\ 000\ ^{kil} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Les valeurs de B résultantes de toutes ces expériences ne présentent que des différences qui peuvent être attribuées à la diversité des qualités des bois, ou aux erreurs des observations. Il n'en serait pas de même, si l'on négligeait le poids des pièces et la considération de la courbure.

Expériences de Bélidor (Science des Ingénieurs, page 318) sur des barreaux de bois de chêne.

Longueur des Pièces	Epaisseur	Distance des appuis	Charge au milieu qui rompt.	Observations
1 pouce	1 pouce	18 pouc.	406 liv.	Non encastrée aux extrémités
1	1	18	608	Encastrée aux deux extrémités.
2	1	18	805	Non encastrée.
1	2	18	1580	Idem.
1	1	36	187	Idem.
1	1	36	283	Idem.
2	2	36	1585	Idem.
20 lignes	28 lignes	36	1660	Idem.

Expériences faites par Mr. Rondelet (tom. 4, pag. 71 et 514), sur des barreaux en bois de chêne et de sapin.

Indication des Bois	Largeur des Pièces	Épaisseur des Pièces	Intervalle des appuis	Charge au milieu, qui rompt.	Flèche à l'instant de la rupture
	pouces.	pouces	pouces.	livres	lignes
Chêne..	2	2	24	2304	
	2	2	18	3105	
	2	3	24	5123	
	3	2	24	3475	
	1	1	42	312	22
	1	1	21	585	7
Sapin..	1	1	42	281	22

Fer fondu.

82). Résultats moyens des expériences faites au Creusot, par Ramus. (Sidérotechnie d'Hassenfratz, tome 1, page 47). Les barreaux ont $0,^{m}0812$ d'équarrissage. Ils sont encastrés à une extrémité. Le poids qui cause la rupture a un bras de levier de $2,^{m}11$.

Fonte mise en expérience.	Charge qui rompt.
	Kilogramm.
Fonte blanche du Creusot, 1.re fusion	586
Fonte grise du Creusot, 1.re fusion	895
Résultat moyen donné par des fontes grises de divers pays, 2.e fusion.	873
Fonte grise du Creusot, 2.e fusion	911

En égalant à $B\frac{ab^2}{6}$ l'expression (6) de β (N.° 63), on aura

$$B=(2P+\Pi)\ \frac{3c}{ab^2}\ ;$$

et cette formule appliquée au résultat moyen des expériences sur les fontes grises donnera

$$B=22\,460\,000^{kil}. \qquad (1)$$

Mais cette valeur est un peu incertaine, parce que les expériences ne font pas connaître avec précision la longueur du bras de levier et parce qu'on néglige l'effet de la courbure de la pièce.

Résultats de diverses expériences faites à l'École des Ponts et Chaussées, et rapportées par Mr. Gauthey (Traité de la construction des Ponts, tome 2, page 150).

Équarrissage des Pièces	Intervalle des appuis	Charge au milieu qui rompt.	Nombre proportionnel à la résistance
mètre	mètre	kilogram.	
0,0271	0,122	3143	19,3
0,0271	0,244	1943	23,9
0,0541	0,244	9178	14,1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,244	13006	20,0
0,0541	0,487	7250	22,2

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 1 300 000 donneront les valeurs du coefficient B, dont la moyenne est

$$B = 28\,100\,000^{Kg} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Expériences faites par Mr. Rondelet (tome IV, page 514). Les barreaux ont 1^{po} d'équarrissage

Fonte mise en expérience.	Distance des appuis	Charge au milieu qui rompt.	charge moyenne	Flèche à l'instant de la rupture
	pouces	livres	livres	lignes
Fonte grise	42	450	450	6,25
Idem		450		6,75
Fonte douce	42	650	656	13,75
Idem		1062		14
Idem		350		4,25
Idem		561		10,5
Fonte grise	21	540	795	1
Idem		1050		2
Fonte douce	21	1650	1461	5,25
Idem		1272		2

La valeur du coefficient B, déduite du résultat moyen des expériences sur la fonte grise, est

$$B = 17\,973\,000^{Kg} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

et sur la fonte douce

$$B = 29\,420\,000^{Kg} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

On peut juger par ces résultats que la résistance du fer fondu à la rupture est environ quatre fois plus grande que celle du bois de chêne.

Il n'existe pas d'expériences concluantes sur la résistance du fer forgé à la rupture causée par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur des pièces.

On trouve dans le Journal de Physique, année 1774, quelques expériences de Mr. Gauthey, sur la résistance de la pierre et de la brique à la rupture produite par un effort qui s'exerce perpendiculairement à la longueur des solides, et dans les recherches de Mr. Vicat sur les chaux de construction, de semblables expériences concernant diverses espèces de mortier.

Les annales de Physique et de Chimie (tome IX, septembre, 1818) offrent aussi les résultats d'un grand nombre d'expériences faites en Angleterre, par Mr. G. Rennie, sur les différents genres de résistance des corps de diverses natures.

Remarques sur la théorie de la résistance à la rupture.

83). La théorie de la résistance des solides à la rupture sous un effort dirigé transversalement, est fondée (N.os 17 et 18) sur l'hypothèse que les résistances des fibres, à l'instant de la rupture, sont encore proportionnelles aux extensions ou contractions de ces fibres, et égales pour des extensions et contractions égales. Alors la position de l'axe d'équilibre, suivant lequel le plan de la section coupe la surface cylindrique des fibres de longueur invariable, est déterminée par la formule (a) du N.° 43; en sorte que cet axe répond au milieu de la hauteur de la section, quand il en partage la figure en deux parties symétriques, comme dans le rectangle et le cercle.

Si cette hypothèse s'accordait exactement avec les phénomènes réels, les valeurs du coefficient B, trouvées dans les deux N.os précédents, ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps, produite par extension ou par écrasement. La différence, lorsqu'il en existe une, doit être attribuée à ce que les fibres des corps n'opposant pas, dans le moment de la rupture, à l'extension et à la compression, des résistances égales, l'axe d'équilibre change de position, et l'expression du moment de rupture ne s'accorde pas avec le véritable état du solide.

Une expérience remarquable, imaginée par Duhamel, manifeste cette circonstance: elle consiste à scier transversalement une pièce de bois, du côté de la face qui devient concave dans la flexion et à remplir le trait de scie par une cale de matière dure. La force de la pièce augmente un peu, quand le trait de scie pénètre jusqu'à $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur; elle est la même, quand il pénètre jusqu'à $\frac{1}{2}$ environ et elle est un peu diminuée, quand il pénètre jusqu'à $\frac{3}{4}$.

Quoi qu'il en soit, les principaux résultats de la théorie subsistent pleinement; c'est-à-dire que les résistances des bases rectangulaires sont proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur et que les

résistances des bases de figures semblables le sont au cube des dimensions homologues. Mais, pour des bases de figures diverses, les rapports des résistances seraient changés. Au reste, on n'a pas à calculer, dans les applications, les résistances respectives des corps considérés à l'état voisin de la rupture; on les considère plutôt à un état de flexion légère, qui n'a point altéré leur élasticité et alors les résultats théoriques conviennent sensiblement à la manière dont la résistance s'exerce.

De la résistance des Solides posés verticalement et chargés sur l'extrémité supérieure.

1°. Cas de la résistance des solides à la flexion et à la rupture qui en provient.

84). Lorsqu'un solide d'une certaine longueur relativement aux dimensions de la section transversale est pressé suivant son axe, il fléchit avant de rompre, si la pression est suffisante. On exprimera, dans ce cas, les conditions de l'équilibre de résistance à la flexion et à la rupture qui en provient, on faisant $Y=0$, $y'=0$ et, pourvu que la flexion soit petite, $\frac{dy^2}{dx^2}=0$, dans les équations générales (B) et (B') qui se réduiront à

$$\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=Xy \;.\;.\;.\;.\;(d),\quad \beta=Xy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(e)$$

Solide posé verticalement et chargé sur l'extrémité supérieure.

85). Considérons un solide appuyé par l'extrémité inférieure A sur un plan horizontal inébranlable, et chargé d'un poids Q sur l'extrémité supérieure M, laquelle se trouve avec l'autre dans la même verticale AM: nous aurons $X=-Q$, et parce que les signes de y et de l'expression du rayon de courbure doivent être changés,

$$-\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=Qy,\qquad \beta=Qy.$$

Multipliant la première de ces équations par $2dy$ et intégrant, on trouve d'abord $-\alpha\frac{dy^2}{dx^2}=Qy^2+C$. Soit f la valeur de y, qui répond à $\frac{dy}{dx}=0$, c'est-à-dire, de la plus grande ordonnée de la courbe, ou la flèche de courbure; il viendra $\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}=dx\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$; intégrant de nouveau et observant que $x=0$, $y=0$ simultanément, on obtient l'équation

$$y=f\sin.x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}.$$

Désignons par c la distance AM et par k un nombre entier quelconque; comme on doit avoir $y=0$ pour $x=c$, il faudra, si f n'est pas nul, que la relation $c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}=k\pi$, soit satisfaite; d'où

$$Q=k^2\pi^2\frac{\alpha}{c^2}\;.\;.\;.\;.\;(1),\quad y=f\sin.k\pi\frac{x}{c}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Appelons s la longueur donnée de la courbe AmM, nous aurons $s=\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\int dx\left(1+\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}-\&^a\right)$; or, l'équation (2) donne $\frac{dy}{dx}=k\pi\frac{f}{c}\cos.x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$, ou $\frac{dy^2}{dx^2}=k^2\pi^2\frac{f^2}{2c^2}\left[1+\cos.2x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}\right]$; donc en négligeant les puissances de $\frac{dy}{dx}$, supérieures à la seconde, intégrant depuis

$x=0$ jusqu'à $x=c$ et remarquant que $\sin 2k\pi=0$, quel que soit le nombre entier k, on aura encore la relation

$$s=c\left[1+\left(k\pi\frac{f}{2c}\right)^2\right] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3)$$

Substituons dans cette équation au lieu de c sa valeur tirée de (1), nous obtiendrons

$$f^2=4\sqrt{\frac{\alpha}{Q}}\cdot\left(\frac{s}{k\pi}-\sqrt{\frac{\alpha}{Q}}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(4)$$

ou en faisant disparaître le radical $\sqrt{\frac{\alpha}{Q}}$ et négligeant la quatrième puissance de $\frac{f}{s}$,

$$f^2=\frac{2s^2}{k^2\pi^2}\left(1-\frac{\alpha k^2\pi^2}{Q s^2}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(5)$$

Or, 1° la moindre valeur dont k soit susceptible est l'unité ; ainsi, tant qu'on aura $Q<\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$, la valeur de f sera imaginaire, c'est-à-dire que le solide ne pourra être maintenu courbé et reviendra à la forme rectiligne. On est donc conduit à cette conséquence singulière que la force ou le poids Q doit surpasser la quantité $\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$ pour que le corps puisse subir une flexion aussi petite qu'on voudra. Cette quantité $\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$ qui constitue la limite des poids qu'un corps peut supporter sans flé-chir est en raison directe du moment d'élasticité et inverse du carré de la longueur ; loi remarquable qui s'accorde avec l'observation (*).

Lorsque le poids Q excèdera un peu la limite dont il s'agit, le corps se courbera et alors on aura $\frac{\alpha\pi^2}{Q s^2}=1-\delta^2$, δ étant une quantité réelle et très-petite ; l'équation (5) sera satisfaite par

$$k=1,\quad f=\frac{s\sqrt{2}}{\pi}\,\delta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(6)$$

l'équation (1) donnera $\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}=\frac{\pi}{c}$ et l'équation (2) de la courbe deviendra

$$y=\frac{s\sqrt{2}}{\pi}\,\delta\sin.\frac{\pi}{c}\,x \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(7)$$

A mesure que Q et par conséquent δ croîtront, la flexion du corps augmentera ; mais la véritable courbe diffèrera de plus en plus de celle qu'exprime l'équation (7) qui n'est qu'approchée et qui suppose la flexion très-petite.

2° Dès que Q sera devenu un peu plus grand que la quantité $4\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$, ou qu'on aura $4\frac{\alpha\pi^2}{Q s^2}=1-\delta'^2$, δ' étant une quantité réelle et très-petite, on satisfera encore à l'équation (5) en prenant

$$k=2,\quad f=\frac{s\sqrt{2}}{2\pi}\,\delta' \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(8)$$

la valeur de f sera très-petite et parce qu'on aura $\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}=\frac{2\pi}{c}$, il en résultera

---

(*) Si l'on multiplie membre à membre, l'équation (1) en f (N° 64) et l'équation $Q=\frac{\alpha\pi^2}{4c^2}$, dans laquelle s est remplacé par la distance $AM=2c$, on trouve $Q=\frac{\pi^2}{24}\cdot\frac{2P}{f}c=0{,}41.\frac{2P}{f}c$. Ainsi la limite Q sera donnée au moyen du rapport constant $\frac{2P}{f}$, qui s'obtient bien plus facilement par l'expérience.

$$y=\frac{s\sqrt{2}}{2\pi}\delta'\sin.\frac{2\pi}{c}x \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

pour l'équation de la courbe.

La valeur de y s'évanouit quand $x=\frac{1}{2}c$; ainsi la courbe passe par le milieu de AM et a la forme indiquée dans la figure 2.

3.° En général, lorsque Q surpassera d'une petite quantité la limite $k^2\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$, on satisfera à l'équation (5) par une valeur réelle et très-petite de f; on pourra supposer à la courbe une forme qui s'écarte peu de l'axe AM, qu'elle coupera en un nombre $k-1$ de points, non compris les deux A et M (*), comme dans les figures 3, 4 &c.

Mais quand le poids Q excédera la limite $\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$, la courbe prendra-t-elle effectivement ces nouvelles formes ou bien une autre qui suppose une flexion considérable et qui échappe à notre approximation? c'est ce qui ne peut être décidé que par la solution rigoureuse de la question. Toujours est-il qu'un corps affecterait ces formes, si le point C ou les points C, D &c. étaient maintenus dans la verticale qui en contient les deux extrémités, et que la charge eût l'une des valeurs comprises dans la formule $k^2\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$.

Si le solide est susceptible de se rompre sous un poids qui surpasse peu la limite $\frac{\alpha\pi^2}{s^2}$, en sorte que f et δ' demeurent très-petits; les équations (6) et (7) subsisteront jusqu'au terme de la rupture; remplaçant donc y, dans l'équation $\beta=Qy$, par la valeur (6) de f et observant que $\delta'=\sqrt{1-\frac{\alpha\pi^2}{s^2}}$, on aura

$$\beta=\sqrt{2\alpha Q\left(\frac{Qs^2}{\alpha\pi^2}-1\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

L'extrémité inférieure du solide encastrée et l'extrémité supérieure libre.

86). Supposons que l'extrémité inférieure A du solide, étant encastrée, l'extrémité supérieure M demeure libre. En désignant par f l'ordonnée extrême BM, nous aurons $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=Q(f-y)$, et, en intégrant,

$$y=f\left(1-\cos.x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}\right);$$

Or, il faut avoir $y=f$ quand $x=c$; donc $c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}=\frac{(2k+1)\pi}{2}$; d'où

$$Q=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\frac{\alpha}{c^2}\ \ldots (1) \qquad y=f\left[1-\cos.\frac{(2k+1)\pi}{2}\frac{x}{c}\right]\ \ldots (2)$$

On trouvera, comme précédemment,

$$s=c\left\{1+\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\frac{f}{2c}\right]^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

et

$$f^2=4\sqrt{\frac{\alpha}{Q}}\left[\frac{2s}{(2k+1)\pi}-\sqrt{\frac{\alpha}{Q}}\right] \text{ ou bien } f^2=\frac{8s^2}{(2k+1)^2\pi^2}\left[1-\frac{\alpha(2k+1)^2\pi^2}{4Qs^2}\right]\ \ldots (4)$$

(*) Voyez Mémoire de Lagrange, Miscellanea Taurinensia, 1770—1773, et Mécanique de M.r Poisson, tome 1, page 212.

La figure (1) répond à $k=0$ et $Q=\frac{\pi^2}{4}\frac{\varepsilon}{c^2}$; la figure (2) à $k=1$ et $Q=\frac{9\pi^2}{4}\frac{\varepsilon}{c^2}$: les ordonnées des points situés à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{2}{3}$ de AB, sont égales à f et $2f$. La figure (3) répond à $k=2$ et $Q=\frac{25\pi^2}{4}\frac{\varepsilon}{c^2}$: les ordonnées des points situés à $\frac{1}{5}$ et à $\frac{3}{5}$ de AB, sont égales à f; celle du point situé à $\frac{2}{5}$ est égale à $2f$, et celle du point situé à $\frac{4}{5}$ est nulle. Et ainsi des autres.

A longueur égale, le solide se courberait suivant la figure (2), sous un poids égal au quart de celui qui le courberait suivant la figure (1) du N.° précédent.

L'extrémité inférieure est encastrée et l'extrémité supérieure maintenue dans la même verticale.

87). Lorsque l'extrémité inférieure du solide est encastrée et l'extrémité supérieure maintenue dans la même verticale, l'équation du N.° 85 exprime l'équilibre de résistance à la flexion; or, comme cette équation se refuse à ce qu'on ait simultanément $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, il s'ensuit que la flexion est impossible.

La direction de la charge est distante de l'axe du solide.

88). Mais si la force Q, au lieu d'agir précisément dans le sens de l'axe, en est distante d'une quantité $BM=f$, aussi petite qu'on voudra, alors l'équation du N.° 86 aura lieu et la valeur de y sera

$$y=f\sin.x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}};$$

Or, cette valeur devant être nulle quand $x=c$, on aura $c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}=2k\pi$; d'où

$$Q=4k^2\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)\qquad y=f\left(1-\cos.2k\pi\frac{x}{c}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

L'expression de y donne également $\frac{dy}{dx}=0$, quand $x=0$ et quand $x=c$; par conséquent la tangente de la courbe à l'extrémité supérieure est verticale, aussi bien que la tangente à l'extrémité inférieure.

La figure répond à $k=1$ et $Q=4\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$: l'ordonnée du point situé à $\frac{1}{2}$ de AM, c'est-à-dire, la flèche de courbure est égale à $2f$; le poids Q est quadruple de celui qui courberait le solide, de la manière indiquée par la figure (1) du N.° 85.

Si l'on écrit $\frac{4}{5}c$, au lieu de c, dans l'expression (1) de Q, on retombera sur la valeur qui se rapporte à la figure (3) du N.° 86; ainsi, le solide dont il s'agit actuellement et les $\frac{4}{5}$, à partir du bas, de celui qui est représenté dans cette figure (1) du N.° 85. sont dans le même état d'équilibre.

L'extrémité supérieure n'est plus maintenue dans la verticale de l'extrémité inférieure.

89). L'extrémité inférieure A du solide est encastrée; le poids Q est suspendu à une traverse CM qui forme invariablement un angle droit avec AB. Ce poids tout en comprimant le solide dans le sens MA, tend à le fléchir et le rompre. Désignons par c et f l'abscisse et l'ordonnée extrêmes AB et BM, et par q la distance CM; l'équation de l'équilibre

de résistance à la flexion sera $\alpha \frac{d^2y}{dx^2} = Q(f+g-y)$ et parce qu'on doit avoir $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, quand $x=0$, l'intégration donnera

$$y=(f+g)\left(1-\cos. x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}\right)$$

Mais il faut aussi que $y=f$ réponde à $x=c$; donc $\frac{g}{f+g}=\cos. c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$; d'où

$$Q=\alpha\left[\frac{\text{arc}\left(\cos=\frac{g}{f+g}\right)}{c}\right]^2 \ldots (1) \qquad y=g\,\frac{1-\cos. x\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}}{\cos. c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}} \ldots\ldots (2)$$

et

$$f=g\left(\frac{1}{\cos. c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}}-1\right) \ldots\ldots (3)$$

On mettra dans l'expression de Q le plus petit des arcs dont le cosinus est égal à $\frac{g}{f+g}$... à moins que certains points du solide ne soient maintenus dans la verticale AB.

La flèche de courbure, produite par un poids donné est proportionnelle à CM. Le poids capable de produire une flèche de courbure, donnée, est en raison inverse du carré de la longueur du solide.

L'extrémité supérieure est encastrée et l'autre extrémité est tirée par un poids agissant à distance de l'axe.

90). Supposons enfin que le solide soit encastré par son extrémité supérieure et que le poids Q lui fasse éprouver une tension longitudinale, en même tems qu'il le fait plier; l'équation sera $\alpha\frac{d^2y}{dx^2} = Q(g-f+y)$. Soit e la base du système népérien et, pour abréger, $\frac{Q}{\alpha}=\gamma^2$, l'intégrale sera

$$g-f+y=Ce^{\gamma x}+C'e^{-\gamma x}$$

Or, on doit avoir, au point A, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ et $x=0$, et au point M, $x=c$, $y=f$; donc $g-f=C+C'$, $0=C-C'$, $g=Ce^{\gamma c}+C'e^{-\gamma c}$; d'où l'on tire

$$C=C'=\frac{g}{e^{\gamma c}+e^{-\gamma c}}, \quad f=g\left(1-\frac{2}{e^{\gamma c}+e^{-\gamma c}}\right), \quad y=g\left(1-\frac{2}{e^{\gamma x}+e^{-\gamma x}}\right).$$

Résultats des principales expériences sur la résistance des solides chargés de bout — Bois.

91). Maintenant nous avons à rapporter les résultats des principales expériences sur la résistance des solides chargés verticalement.

Résultats principaux des expériences de Mr. Girard (Traité, page 138, table I) sur des pièces de bois de chêne, posés verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des Pièces.	Largeur des Pièces.	Épaisseur des Pièces.	Première flèche de courbure observée.	Charge qui a causé la première inflexion.	Charge qui a causé la rupture
mètres	mètres	mètres	mètre	Kilogram.	Kilogram.
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	42514
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	

2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	33120
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
1,95	0,156	0,133	0,0879	17322	
1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	32997
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,129	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	37305
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

Les pièces se courbent généralement sur les deux faces: on a inscrit dans le tableau la plus grande des deux premières flèches de courbure observées.

92). Résultats moyens des expériences faites par Mr. Lamandé (Traité de Gauthey, tome II, page 48) sur des pièces de chêne de Champagne, assez sec, posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des Pièces	Équarrissage des Pièces	Première flèche de courbure observée.	Charge qui a causé la première inflexion	Charge qui a causé la rupture
mètres	mètre.	mètre	Kilogram.	Kilogram.
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3569
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9246	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	27211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40495
1,948	0,108	0,005	9663	27629

93). Résultats moyens des expériences faites par Mr. Rondelet (tome IV, page 68), sur des pièces posées verticalement et chargées de bout. Ces pièces avaient toutes 1po d'équarrissage

Espèces de Bois	Longueur des pièces	Charge qui a causé la rupture
	pouces	livres
Chêne......	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Sapin.....	1	7490
	12	6355
	24	3429
	36	2375

L'auteur conclut de ces expériences la règle suivante : prenant pour unité la force capable d'écraser un cube, laquelle est (N.° 27) de 44 lb par ligne carrée de la section transversale pour le chêne et 52 lb pour le sapin, la force capable de rompre une pièce dont la hauteur est 12 fois l'épaisseur, sera $\frac{5}{6}$

24 . . . . $\frac{1}{2}$

36 . . . . $\frac{1}{3}$

48 . . . . $\frac{1}{6}$

60 . . . . $\frac{1}{12}$

72 . . . . $\frac{1}{24}$

Selon le même auteur, une pièce de bois, chargée verticalement est susceptible de plier dès que la longueur surpasse 10 fois l'équarrissage.

Fer forgé.

94). Expériences faites à l'École des Ponts et Chaussées (Traité de Gauthey, tome II, page 152) sur des pièces de fer forgé, posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des Pièces.	Largeur des Pièces.	Épaisseur des Pièces.	Charge qui a causé la rupture
mètre.	millimèt.	millimèt	Kilogram.
0,244	20,3	20,3	10426
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,325	13,5	13,5	3951

95). D'après un très-grand nombre d'expériences faites par M.r Rondelet (tome IV, page 522) sur des pièces ayant de 6 à 12 lig. d'équarrissage et de 1 pi ½ à 20 pi de longueur ; cet auteur établit qu'un cube de fer forgé se comprimant sous une charge de 512 lb par ligne carrée de la section transversale (N.° 28), la charge nécessaire pour faire plier et rompre une barre dont la longueur est égale à 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243 fois l'équarrissage, est 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 lb, par ligne carré de la section transversale.

96). Expériences faites par M.r Duleau (Essai, page 26) sur des pièces de fer forgé, pressées parallèlement à leur longueur.

Pièces soumises à l'expérience.	Longueur des Pièces.	Largeur des Pièces.	Épaisseur des Pièces.	Charge qui a causé la flexion.
	mètres.	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.
Fer du Périgord. La section est un triangle équilatéral, de $0^m{,}038$ de côté	3,02			860
Idem	2,01	30	11	190
Idem, doux (destiné pour les fers des chevaux) . .	2,01	70	11,2	520
Même pièce, fixée au milieu				1945
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	2,02	45	12	400
Fer du Périgord	2,01	40	11,5	260
Même pièce, fixée au milieu				900
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	2,01	58	15	1000
Idem	3,02	25	15	180
Idem	3,02	39	19,6	780
Idem	2,01	60	20	2400
Idem	3,02	60	20	1200
Idem	3,02	39	24,5	1320
Idem	3,02	31	31	2000
Fer rond, de Bilbao, ayant $0^m{,}0318$ de diamètre	3,02			1285

Il résulte généralement de ces expériences qu'en calculant les charges qui causent la flexion par la formule $Q=\pi^2\frac{\varepsilon}{C^2}$ du N.° 85 (dans laquelle on remplace ε par $A\frac{ab^3}{12}$, pour une pièce rectangulaire ou par $A\frac{\pi r^4}{4}$, pour une pièce cylindrique, et A par $26\,000\,000\,000^{kg}$), on trouve des valeurs moindres que celles qui résultent de l'expérience, dans le rapport de 7 à 8 environ (Essai, page 24). L'auteur attribue cette différence en partie au frottement du levier au moyen duquel la pression est transmise.

Fers fondus.

97). On peut consulter sur ce sujet les expériences de M.r G. Rennie, rapportées précédemment (N.° 29).

Causes qui peuvent faire différer les résultats de l'expérience de ceux de la théorie.

98). La théorie de la résistance des solides pressés parallèlement à leur longueur, suppose essentiellement la pression Q, dirigée suivant l'axe même du solide, ou du moins dans le plan mené par cet axe, perpendiculairement auquel la flexion s'effectue. Dans la réalité le poids dont un solide est chargé verticalement, se répartit ordinairement sur toute l'étendue de la section transversale; il faudrait donc, pour que l'expérience s'accordât exactement avec la théorie, que les solides fussent terminés aux extrémités par une pointe ou par une arête. La recherche de la résistance, quand le poids est réparti sur toute l'étendue de la section transversale, dépend de considérations d'un autre ordre.

Dans la théorie, on a regardé le sens de la flexion du solide comme déterminé et l'on a désigné par ϵ la valeur respective du moment d'élasticité. Lorsqu'un solide est chargé sur l'extrémité supérieure, le sens de la flexion, en général, n'est pas déterminé : il est naturel d'admettre que le solide fléchira dans le sens pour lequel la valeur du moment d'élasticité est la moindre possible. Si la section transversale est carrée ou circulaire (N.° 59), cette valeur est la même dans tous les sens et si la section est rectangulaire (N.° 53), la moindre valeur du moment d'élasticité répond à la flexion dans le sens du plus petit côté. Dans les expériences, les solides à base carrée fléchissent indifféremment dans le sens de la diagonale ou des côtés ; les solides à base rectangulaire même, à moins que les deux côtés ne soient très-différents, ne fléchissent pas toujours exactement dans le sens du plus petit côté, la direction de la flexion étant le plus souvent déterminée par quelque défaut d'homogénéité dans le solide, ou par la manière dont la pression s'exerce aux extrémités.

Ces remarques expliquent pourquoi les expériences connues ne donnent pas toujours pour le poids capable de faire fléchir un solide à base rectangulaire, chargé verticalement, la même valeur qu'on obtiendrait de la formule $Q = \pi^2 \frac{\epsilon}{c^2}$, en supposant la flexion dirigée dans le sens du petit côté de la section transversale. Mais si l'on prend les précautions convenables pour accorder les circonstances de l'expérience avec les hypothèses sur lesquelles les formules sont fondées, alors ces formules représentent exactement les résultats de l'expérience.

De la résistance des Solides chargés obliquement.

3.e cas de la résistance des solides à la flexion ; solide incliné, encastré à l'extrémité inférieure et chargé d'un poids à l'extrémité supérieure.

99) Considérons un solide AM posé obliquement, encastré à son extrémité inférieure A et chargé d'un poids Q à son extrémité supérieure M. Désignons par ε l'angle que forme avec la verticale la direction primitive AB du solide, et par c, f les coordonnées AB, BM de l'extrémité M ; l'équation générale (B), à cause de $x'=c$, $y'=f$ et de $X=-Q\cos\varepsilon$, $Y=Q\sin\varepsilon$, deviendra d'abord

$$\epsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (c-x)Q\sin\varepsilon + (f-y)Q\cos\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (f),$$

et si, pour abréger, l'on fait $\frac{Q\sin\varepsilon}{\epsilon} = p^2$, $\frac{Q\cos\varepsilon}{\epsilon} = q^2$, $c-x=u$, $f-y=v$, elle se réduira à

$$d^2v + q^2v\,du^2 = -p^2u\,du^2;$$

équation linéaire du second ordre, dont l'intégrale (voyez Lacroix, N.° 289, page 407) est $v = C \sin qu + C' \cos qu - \frac{p^2}{q^2} u$, c'est-à-dire,

$$f - y = E \sin q(x+F) - \frac{p^2}{q^2}(c-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Or, on doit avoir, au point A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point M, $x=c$, $y=f$; d'où $f = E \sin qF - \frac{p^2 c}{q^2}$, $0 = qE \cos qF + \frac{p^2}{q^2}$, $0 = \sin q(c+F)$; ainsi, il vient par là $\sin qF = \sin qc$, $\cos qF = -\cos qc$, $E = \frac{p^2}{q^3 \cos qc}$ et conséquemment

$$f = \frac{p^2}{q^3}(\operatorname{tang} qc - qc) \ldots\ldots (2), \quad y = \frac{p^2}{q^3}\left(\frac{\sin qc - \sin q(c-x)}{\cos qc} - qx\right) \ldots (3)$$

Comme le rapport $\frac{f}{c}$, dont la valeur est $\cot \varepsilon \left[\frac{\operatorname{tang} qc}{qc} - 1\right]$, doit demeurer fort petit, il faudra que le rapport $\frac{\operatorname{tang} qc}{qc}$ surpasse très-peu l'unité. Soit donc $0, \sigma, \sigma', \sigma''$ &c. la suite des arcs respectivement de même longueur que leurs tangentes (Euler, introduction à l'analyse infinitésimale, tome 2, page 325), on ne pourra attribuer à $\frac{Q \sin \varepsilon}{\alpha}$ que des valeurs qui n'excèdent pas beaucoup les nombres $0, \frac{\sigma^2}{c^2}, \frac{\sigma'^2}{c^2}, \frac{\sigma''^2}{c^2}$ &c.a Si l'on adopte la première de ces valeurs, le solide affectera la courbe représentée dans la figure. Les courbes relatives aux autres valeurs, auraient un nombre de plus en plus grand de points d'inflexion, mais ne se produiraient qu'autant que les points correspondants du solide seraient maintenus fixement dans la direction AB.

Lorsque tous les points de A en B sont libres, les poids Q que le solide peut supporter, doivent donc satisfaire à la condition que la quantité $c\sqrt{\frac{Q \sin \varepsilon}{\alpha}}$ soit comprise entre 0 et σ, et que la valeur précédente de f, qui exprimera le déplacement du point M, en vertu de l'action du poids Q, soit fort petite.

Le solide est encastré à l'extrémité supérieure et chargé d'un poids à l'extrémité inférieure.

100). Supposons le solide encastré à l'extrémité supérieure A et chargé du poids Q à l'extrémité inférieure M, le signe de la composante X changera et l'on aura à intégrer l'équation

$$d^2 v - q^2 v\, du^2 = -p^2 u\, du^2;$$

Or, l'intégrale (voyez Lacroix, N.° 282) est $v = Ce^{qu} + C'e^{-qu} + \frac{p^2}{q^2} u$, c'est-à-dire,

$$f - y = Ce^{q(c-x)} + C'e^{-q(c-x)} + \frac{p^2}{q^2}(c-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Mais, au point A, on a $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et, au point M, $x=c$, $y=f$; donc $f = Ce^{qc} + C'e^{-qc} + \frac{p^2}{q^2} c$, $0 = q(Ce^{qc} + C'e^{-qc}) + \frac{p^2}{q^2}$; $0 = C + C'$; d'où résulte $C' = -C$, $C = -\frac{p^2}{q^3(e^{qc} + e^{-qc})}$, et

$$f = \frac{p^2}{q^3}\left(qc - \frac{e^{qc} - e^{-qc}}{e^{qc} + e^{-qc}}\right) \ldots (2), \quad y = \frac{p^2}{q^3}\left[qx - \frac{e^{qc} - e^{-qc} - e^{q(c-x)} + e^{-q(c-x)}}{e^{qc} + e^{-qc}}\right] \ldots (3)$$

Solide incliné, chargé entre ses extrémités.

101). Les deux questions précédentes en renferment plusieurs autres: par exemple, celle d'un solide incliné AB, chargé en C, d'un poids Q, et supporté horizontalement à ses extrémités A et B. Ce solide n'a aucune tendance à glisser parce que le poids ne s'abaisserait point par ce glissement. Soient c, c' les longueurs AC, BC; il est clair que les efforts exercés en A et B seront $Q\frac{c'}{c+c'}$, $Q\frac{c}{c+c'}$. Chacune des parties AC, BC du solide pourra être regardée comme encastrée en C et sollicitée à son extrémité A ou B par une force égale et contraire à l'effort qui y répond. Ainsi, la partie AC, qui sera comprimée dans le sens de sa longueur, se trouvera dans le même état que le solide considéré (N.º 99), la force désignée par Q dans ce numéro, étant ici $Q\frac{c'}{c+c'}$; et la partie BC, qui sera tirée suivant sa longueur, se trouvera dans le même état que le solide considéré (N.º 100), la force désignée par Q dans ce numéro étant ici $Q\frac{c}{c+c'}$.

Il en serait de même du solide incliné AB, supporté par le point d'appui C, sur lequel il ne peut glisser, et chargé à ses extrémités A et B, de poids qui se font mutuellement équilibre: la partie BC, qui est comprimée, se trouve dans le même état que le solide du N.º 99 et la partie AC, qui est étendue, se trouve dans le même état que le solide du N.º 100.

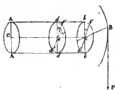
Il en est encore de même du solide AB, chargé en C, d'un poids Q et appuyé, par l'extrémité inférieure A, sur un plan horizontal, et, par l'extrémité supérieure B, contre un plan vertical. Mais l'extrémité A tendant à glisser doit être arrêtée par un plan vertical ou retenue par un tirant. Désignons par c, c', les longueurs AC, BC; par ε l'angle ACD; par h, h', les résistances horizontales des appuis A et B et par g la résistance verticale de l'appui A; nous aurons $AD = c\sin\varepsilon$, $AE = (c+c')\cos\varepsilon$, et les conditions de l'équilibre de situation seront, $h = h'$, $g = Q$ et $Qc\sin\varepsilon = h'(c+c')\cos\varepsilon$; d'où

$$h' = Q\frac{c\tang\varepsilon}{c+c'}.$$

Quant à l'équilibre de résistance, chacune des parties AC, BC est dans le même état que si elle était encastrée en C et sollicitée à son autre extrémité par les forces h, g ou par la force h'; donc 1° la partie AC, qui est comprimée, s'assimile au solide du N.º 99, les forces désignées par X, Y, Q dans ce numéro, ayant ici les valeurs respectives $h\sin\varepsilon + g\cos\varepsilon = Q\cos\varepsilon\left(1+\frac{c\tang^2\varepsilon}{c+c'}\right)$, $g\sin\varepsilon - h\cos\varepsilon = \frac{c'\sin\varepsilon}{c+c'}$, $\sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{h^2+g^2} = Q\sqrt{1+\frac{c^2\tang^2\varepsilon}{(c+c')^2}}$; 2° la partie BC, qui est pareillement comprimée s'assimile au même solide, les forces X, Y, Q.

ayant les valeurs $h \sin \varepsilon = Q \frac{c \sin \varepsilon \tang \varepsilon}{c+c'}$, $h \cos \varepsilon = Q \frac{c \sin \varepsilon}{c+c'}$, $\sqrt{X^2+Y^2} = h = Q \frac{c \tang \varepsilon}{c+c'}$.

De la résistance des solides à la torsion et à la rupture qui en provient.

Équations générales de l'équilibre de résistance à la torsion et à la rupture qui en provient.

102). Considérons un solide cylindrique AA bb, encastré horizontalement par l'extrémité C, et dont l'autre extrémité c est soumise à l'action d'une force P, qui, au moyen d'un levier cB, tord ce solide autour de son axe Cc. Supposons que par l'effet de la torsion, les diamètres bb et dd de la section extrême c et d'une section intermédiaire quelconque c, lesquels répondent au diamètre fixe AA de l'extrémité encastrée C, se soient transportés l'un en b'b', l'autre en d'd'. Suivant les hypothèses établies (N.° 19) 1.° les angles de torsion bcb', d, d' sont proportionnels aux distances Cc, Cc; 2° la résistance de la molécule mm' de la section c, est en raison directe de la différence entre les angles de torsion de cette section et d'une section antérieure quelconque, et en raison inverse, tant de la distance des deux sections, que de la distance de la molécule à l'axe du solide.

Désignons par c la longueur Cc; par θ l'arc qui mesure l'angle de torsion, bcb', dans le cercle dont le rayon est l'unité linéaire; par φ et v les coordonnées polaires des points de la section c; par U la fonction de φ, qui exprime le rayon vecteur du contour de cette section; par V la plus grande valeur de v dans cette même section; par B le bras de levier Bc; par t le poids constant qui, pour chaque espèce de corps exprime la résistance spécifique à la torsion et par T ce que devient t à l'instant de la rupture. (Le poids t représente la résistance, rapportée à l'unité superficielle, qu'oppose à la torsion, l'élément d'une section quelconque, compris entre le cercle décrit du pôle de la section, avec le rayon 1, et le cercle infiniment voisin).

Cela posé, l'aire de l'élément mm', dont le rayon vecteur est v, s'exprime par $v\,dv\,d\varphi$; or, il est clair que $\frac{\theta}{c}$ sera l'arc qui mesure l'angle de torsion de la section c, par rapport à la section antérieure qui en serait à la distance 1; en sorte que l'élément mm' aura décrit effectivement l'arc $\frac{\theta}{c} v$, par rapport à l'élément de la même fibre, qui appartient à cette section antérieure; par conséquent, $t\frac{\theta}{c} v^2 dv\,d\varphi$ exprimera la résistance de l'élément mm' à la torsion, et $t\frac{\theta}{c} v^3 dv\,d\varphi$, le moment de cette résistance relativement au pôle c.

Si l'élément $v\,dv\,d\varphi$ était placé à la distance V du pôle c, sa résistance à la rupture, dans l'instant où elle est près de s'opérer, serait $T\,v\,dv\,d\varphi$; donc, pour la distance v, elle s'exprime par $T\frac{v}{V}v\,dv\,d\varphi$, et son moment par $\frac{T}{V}v^3dv\,d\varphi$.

Ainsi, les équations de l'équilibre de résistance à la torsion et à la rupture qui en provient, sont respectivement.

$$BP=t\frac{\theta}{c}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{U}v^3dv\;\ldots\;(g),\quad BP=\frac{T}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{U}v^3dv\;\ldots\;(h)$$

La résistance à la torsion est en raison directe, non pas de l'arc θ, mais du rapport $\frac{\theta}{c}$ de cet arc à la longueur c, c'est-à-dire, en raison de l'arc décrit effectivement par la molécule placée à la distance 1, de l'axe et de l'extrémité fixe du solide. La résistance à la rupture est indépendante de ces quantités.

Expressions générales des moments d'élasticité et de rupture, quant à la torsion

103). Les seconds membres des équations précédentes sont les expressions générales des moments d'élasticité et de rupture, à l'égard de la torsion, moments que nous nommerons α' et β'.

En comparant ces expressions on reconnaît que la seconde se déduit de la première par la substitution de $\frac{T}{V}$ au lieu de $t\frac{\theta}{c}$..

Application au cercle, au rectangle et au carré.

104). Lorsque la section transversale est un cercle de rayon r, il vient $U=V=r$ et

$$BP=\alpha'=t\frac{\pi r^4\theta}{2c}\;\ldots\;(1),\quad BP=\beta'=T\frac{\pi r^2}{2}\;\ldots\;(2)$$

d'où

$$\theta=\frac{P}{t}\frac{2cB}{\pi r^4}\;\ldots\ldots\;(3).$$

Un rectangle BEFG, se décompose en huit triangles dont on n'a à considérer que les deux ABC, BCD à chacun desquels trois des six autres sont analogues. L'équation de la droite AB est $v=\frac{a}{2\cos\varphi}$; on a d'ailleurs $\int v^3dv=\frac{1}{4}v^4=\frac{a^4}{4.16\cos^4\varphi}$ et $\int\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi}=\frac{1}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ (voyez Lacroix, page 298); ainsi, φ représentant l'angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$, le moment d'élasticité du triangle ABC, sera

$$t\frac{\theta}{c}\frac{a^4}{4.16}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right);$$

la droite BD est exprimée par l'équation $v=\frac{b}{2\cos\varphi}$; donc, φ représentant l'angle dont la tangente $=\frac{a}{b}$, le moment d'élasticité du triangle BCD, sera pareillement

$$t\frac{\theta}{c}\frac{b^4}{4.16}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right);$$

ajoutant ces deux expressions multipliées par 4 et observant que .... $V=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, on aura, pour le rectangle,

$$BP=\alpha'=t\frac{ab(a^2+b^2)\theta}{12c}\;\ldots\;(4),\quad BP=\beta'=T\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{5}\;\ldots\;(5)$$

d'où

$$\theta = \frac{P}{t} \cdot \frac{12cB}{ab(a^2+b^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

et, par conséquent, pour le carré,

$$BP = \alpha' = t\frac{a^4\theta}{6c} \ldots\ldots (7), \quad BP = \beta' = T\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \ldots\ldots (8)$$

$$\theta = \frac{P}{t} \cdot \frac{6cB}{a^4} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

On conclut de là que les moments d'élasticité du carré et du cercle inscrit, sont dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$, comme (Nº 55), et les moments de rupture, dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

Usage des formules obtenues.

105). Les formules trouvées serviront à calculer soit l'angle de torsion, affecté par un solide sous un effort donné, soit l'effort capable d'opérer la rupture de ce solide, lorsque les valeurs des coefficients t et T auront été déterminées par des expériences préalables.

De la détermination des coefficients d'élasticité et de rupture, relatifs à la torsion.

106). Ces expériences consistent à observer simultanément l'angle de torsion d'un solide donné, le poids qui produit cette torsion et le bras de levier de ce poids. Quand il s'agit de la rupture, on n'a besoin de connaître que le poids qui l'opère et son bras de levier.

Selon que la section transversale du solide sera un cercle ou un carré, les valeurs de t, tirées des formules (1) et (7), seront

$$t = P\frac{2cB}{\pi r^4\theta} \ldots\ldots (10), \quad t = P\frac{6cB}{a^4\theta} \ldots\ldots (11)$$

et celles de T, tirées des formules (2) et (8),

$$T = P\frac{2B}{\pi r^3} \ldots\ldots (12), \quad T = \frac{3B\sqrt{2}}{a^3} \ldots\ldots (13)$$

Résultats des principales expériences sur la résistance à la torsion, et à la rupture qui en provient.

107). Le fer forgé et le fer fondu sont presque les seuls corps sur lesquels il ait été fait des expériences propres à la détermination des valeurs de t et T.

1º Résultats des expériences faites par Mr Duleau (ouvrage cité, page 50 et suivantes) sur la résistance du fer forgé à la torsion. Le poids qui produit la torsion est 10 kg et son bras de levier 0m,32.

Désignation des fers.	Longueur.	Grosseur	Angle de torsion	Nombres proportionnels à la résistance
	mètre.	mètre. diamètre.	degrés. sexag.	
Fer rond du Périgord	2, 81	0,0152	13, 4	12, 57
Idem	3, 17	0,0196	6	11, 47
Fer rond Anglais, marqué Dowlais	2, 40	0,0198	4	12, 41
Fer rond de l'Ariège . . .	3, 57	0, 0215	4, 8	11, 16
Idem	2, 89	0, 0215	4, 5	9, 6
Fer rond du Périgord . . .	3, 19	0, 0221	3, 32	11, 99
Idem	2, 89	0, 0230	3	10, 96
Fer rond Anglais	3, 24	0, 0235	2, 34	14, 48
Fer rond du Périgord . . .	2, 94	0, 0265	1, 82	10, 48
Idem	3, 35	0, 0267	1, 87	11, 23
Idem	2, 92	0, 0357	0, 625	9, 19

Fer rond de l'Ariège	2,77	0,0268	1,65	10,39
		côtés.		
Fer carré anglais marqué C2	4,12	0,0200	6,5	17,46
Idem	2,52	0,0200	4	17,36
Fer carré du Périgord . . .	2,52	0,0204	3,08	15,27
Idem	3,39	0,0326	0,62	15,40
Fer plat anglais	2,91	{ 0,0340 0,0086 }	11,4	
Idem	1,55	{ 0,0340 0,0086 }	5,62	
Fer plat du Périgord	2,91	{ 0,0340 0,0105 }	7,2	
Fer plat anglais, marqué B. .	1,45	{ 0,0678 0,0147 }	0,85	

Les nombres de la dernière colonne, relatifs aux expériences sur les fers ronds, doivent être multipliés par 583610000 (*) pour donner les valeurs de la constante t, qui résultent de ces expériences; le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids. La moyenne entre ces nombres est 11,33 et la valeur de t, qui y répond,

$$t = 6\,612\,300\,000^{\,kg}.$$

Les nombres de la dernière colonne, relatifs aux expériences sur les fers carrés, doivent être multipliés par 6000000, pour donner les valeurs de t. La moyenne entre ces nombres est 16,03 et la valeur de t qui y répond,

$$t = 96\,180\,000^{\,kg}$$

La différence des deux résultats tient sans doute, en grande partie, à la diversité des qualités des fers; mais peut-être pour quelque chose à ce que les formules précédentes, relatives aux corps carrés, ne représentent pas aussi exactement les phénomènes naturels que celles qui se rapportent aux corps ronds; les fibres extérieures au cylindre inscrit

(*) Soit G l'angle qui répond à l'arc θ; on aura $\theta = \frac{\pi}{180} G$: Mr. Duleau a calculé ses nombres proportionnels à la résistance, par la formule $H = P\frac{cB}{D^4 G}$, dans laquelle $D = 2r$ et $H = \frac{\pi t}{32}$; ainsi il remplace θ par G et t par $t\frac{\pi}{180}$ et, comme il prend d'ailleurs le millimètre pour unité linéaire, nous avons $t = \frac{6\,000\,000\,H}{\frac{\pi}{32}\cdot\frac{\pi}{180}}$; c'est-à-dire que nous devons multiplier ses nombres par 583 610 000.

Mr. Navier prend aussi G au lieu de θ; il a, en conséquence, $t = \frac{6\,000\,000\,H}{\frac{\pi}{32}} = 10\,186\,000.H$.

Cette substitution de G à θ est indifférente, puisqu'elle n'influe que sur la valeur absolue de t; car l'équation (10) ne change point, quand on y écrit G et $t\frac{\pi}{180}$, au lieu de θ et t.

participant et à la résistance de celles de ce cylindre et à la résistance d'un corps élastique, encastré par un bout et chargé à l'autre;

2° Le tableau suivant présente les résultats des expériences sur la torsion du fer fondu et de divers autres métaux, faites par M.r G. Rennie (Annales de Chimie et de Physique), septembre, 1818). Le bras de levier des poids était de 2^{p.} anglais.

Indication des Corps soumis à la torsion.	Longueur des pièces.	Equarrissage.	Poids moyen produisant la rupture	
	pouces anglais	pouces anglais	livres avoir du poids	
			livres.	onces.
Fer coulé horizontalement.	0	$\frac{1}{4}$	9	15
Fer coulé verticalement.	0	$\frac{1}{4}$	10	10
Fer coulé horizontalement. . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	7	3
Idem.	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	1
Idem.	1	$\frac{1}{4}$	8	8
Fer coulé verticalement.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	10	1
Idem.	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	9
Idem.	1	$\frac{1}{4}$	8	5
Idem.	6	$\frac{1}{4}$	9	12
Fer coulé horizontalement. . . .	0	$\frac{1}{2}$	93	12
Idem.	0	$\frac{1}{2}$	74	0
Idem.	10	$\frac{1}{2}$	52	0
Acier.	0	$\frac{1}{4}$	17	1
Fer forgé d'Angleterre.	0	$\frac{1}{4}$	10	2
Fer forgé de Suède.	0	$\frac{1}{4}$	9	8
Métal de canon dur.	0	$\frac{1}{4}$	5	0
Fonte jaune fine.	0	$\frac{1}{4}$	4	11
Cuivre coulé.	0	$\frac{1}{4}$	4	5
Etain.	0	$\frac{1}{4}$	1	7
Plomb.	0	$\frac{1}{4}$	1	0

Le résultat moyen des expériences sur le fer fondu donne la valeur

$$T = 41\,360\,000^{kg}.$$

De la résistance d'un solide fléchi, posé horizontalement entre deux appuis, et chargé au milieu.

Solide bandé entre deux appuis et chargé d'un poids en son milieu.

108). Un solide posé entre deux appuis M, M' de niveau, dont la distance est un peu moindre que sa longueur et qui le tiennent courbé, de sorte que sa convexité soit tournée par en haut, et ensuite chargé d'un poids 2Q en son milieu A.

Il est clair que chaque moitié est dans le même état que si étant encastrée en A, elle était sollicitée en M ou M', par une certaine force

dont la composante verticale est Q. Ainsi en désignant par X, la composante horizontale de l'effort exercé contre les appuis ; par c la moitié de leur intervalle MM', par s la demi-longueur AmM du solide et par f l'ordonnée extrême BM, nous aurons $\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=-Q(c-x)+X(f-y)$, et en faisant, pour abréger, $\frac{Q}{\alpha}=p^2$, $\frac{X}{\alpha}=q^2$, puis intégrant,

$$f-y=E\sin.q(x+F)+\frac{p^2}{q^2}(c-x)\ldots\ldots\ldots(1)$$

on doit avoir, au point A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point M, $x=c$, $y=f$; d'où résulte

$$f=E\sin qF+\frac{p^2}{q^2}c,\quad 0=qE\cos qF-\frac{p^2}{q^2},\quad 0=\sin.q(c+F),$$

c'est-à-dire,

$$q(c+F)=k\pi,\quad E=-\frac{p^2}{q^3\cos qc}\ \text{et}\ \tang qc=qc-\frac{q^3f}{p^2}\,;$$

Il s'ensuit

$$f=\frac{p^2}{q^3}(qc-\tang qc)\ldots(2),\quad y=\frac{p^2}{q^3}\left(qx-\frac{\sin qc-\sin.q(c-x)}{\cos qc}\right)\ldots(3)$$

et, à fort peu près,

$$s=c+\frac{p^4c}{4q^4}\left(3-\frac{3\tang qc}{qc}+\tang^2qc\right)\ldots(4),\quad s=c+\frac{p^4c^3}{4q^2}+\left(\frac{3p^2}{4q^2}-\frac{p^2c^2}{2}\right)f.\ (5)$$

Ainsi la force X doit satisfaire à la condition que l'arc $c\sqrt{\frac{X}{\alpha}}$, surpasse sa tangente, de la quantité $f\frac{X}{Q}\sqrt{\frac{X}{\alpha}}$, laquelle doit être fort petite, parce que la courbure du solide est supposée très-légère.

Représentons par 0, b, b', b''... la suite des arcs égaux en longueur à leurs tangentes ; on satisfera à la condition, en donnant à la force X, une valeur un peu moindre que les nombres $\alpha\frac{b^2}{c^2}$, $\alpha\frac{b'^2}{c^2}$, $\alpha\frac{b''^2}{c^2}$... Il naîtra de ces suppositions des courbes qui offriront un nombre plus ou moins grand de points d'inflexion.

La première valeur résout la question proposée : les équations (2) et (4) feront connaître X et f, lorsque c, s et Q seront donnés.

Si l'on suppose $f=0$, les équations (2) et (4) donneront $\tang qc=qc$, $s=c+\frac{p^4c^3}{4q^2}$; d'où $X=b^2\frac{\alpha}{c^2}=(4,4934)^2\frac{\alpha}{c^2}$ et $X=\frac{Q^2}{4\alpha}\frac{c^2}{s-c}$ ou.... $2Q=\frac{4b\alpha}{c^2}\sqrt{\frac{s-c}{c}}$; expression du poids $2Q$, qui agissant en A abaisserait ce point au niveau des appuis et doit être regardé comme le plus grand que le solide puisse supporter. Car si l'on supposait le point A abaissé au-dessous de C, et que l'on comptât les y positives de bas en haut, le signe de Q, dans l'équation d'équilibre, changerait et l'on retomberait sur les résultats du N^o 99 ; en sorte que la force X devrait être supposée un peu plus grande que 0, $\alpha\frac{b^2}{c^2}$, $\alpha\frac{b'^2}{c^2}$.... suppositions dont la première doit être admise ici et d'où il résulte que la force X, et le poids $2Q$ prendront des valeurs beaucoup moindres que celles qu'ils avaient quand le point A était

au-dessus de l'horizontale MM'. La courbe ne présente plus de point d'inflexion et tourne sa convexité par en bas.

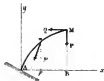
Les résultats précédents expliquent le surcroît de résistance qu'un solide acquiert, lorsque, ayant été courbé, les extrémités sont placées entre deux obstacles qui ne peuvent être écartés. Cette résistance a une limite qui ne peut être dépassée sans que le solide ne change aussitôt de figure. Après ce changement le solide ne peut plus supporter qu'un poids beaucoup plus petit et même plus petit que celui qu'il supporterait, à courbure égale, si les extrémités étaient simplement posées sur des appuis.

De la résistance des solides dont l'axe est courbe.

Solides naturellement cintrés, chargés de diverses manières.

109) Il s'agit maintenant de solides dont la figure naturelle est courbe, tels que les arcs en bois ou en fer employés à la construction des ponts.

Deux cas se présentent: ou la figure de la courbe et la distribution de la charge ont une telle relation que le solide se trouve simplement comprimé ou étendu et n'a aucune tendance à changer de figure; ou bien le solide tend à fléchir par l'action des poids dont il est chargé.

De la courbe d'équilibre, relative à une distribution donnée de la charge.

110). Proposons-nous d'abord de déterminer la courbe d'équilibre, c'est-à-dire, la courbe suivant laquelle le solide devrait être tracé, pour qu'il ne tendît point à fléchir sous une charge dont la loi de distribution est connue.

Supposons que la courbe AM, à chaque point de laquelle est appliquée une force dirigée dans son plan, soit la figure naturelle du solide; il est clair que cette courbe n'aura aucune tendance à fléchir, si la résultante des forces qui sollicitent la partie quelconque mM, est dirigée suivant la tangente au point m, ou, ce qui revient au même, s'il y a équilibre entre ces forces et la pression, prise en sens contraire, qui en naît au point m, suivant la tangente; bien entendu que l'extrémité A s'appuie contre un plan fixe, normal à la courbe.

Désignons par a et b les coordonnées du point extrême M; par s la longueur de l'arc Am; par S la longueur totale AM; par ρ le rayon de courbure au point m; par θ l'angle que la tangente de la courbe, à l'origine A, fait avec l'axe horizontal Ax; par F la valeur de la force appliquée au point m, valeur rapportée à l'unité de longueur de la courbe et donnée en fonction de l'arc s;

par φ l'angle que la direction de la force F forme avec l'axe Ax; par T la pression exercée au point m, dans le sens de la courbe; enfin par P et Q les forces verticale et horizontale appliquées au point extrême M.

Or, les composantes verticale et horizontale de la pression T sont respectivement $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dx}{ds}$, et pareillement les sommes des composantes verticales et horizontales des forces appliquées à la partie mM, sont respectivement $\int_s^S ds\,F\sin\varphi$, $\int_s^S ds\,F\cos\varphi$; la première condition de l'équilibre sera donc

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_s^S ds\,F\sin\varphi,\quad T\frac{dx}{ds}=Q+\int_s^S ds\,F\cos\varphi\,.\,.\,.\,.\,.\,(i).$$

Mais elle comprendra implicitement la seconde, qui concerne les moments; puisque si, pour chaque point m, la résultante des forces appliquées à la partie mM, est parallèle à la tangente en m, toutes les résultantes sont tangentes à une courbe parallèle à AmM et qui passant aussi par le point M, se confond avec AmM (Coulomb, Mémoire cité, §XVII, remarque I). Ainsi les conditions de l'équilibre sont complettement exprimées par les équations (i).

Ajoutons les différentielles de ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$, et, observant que $\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1$; d'où $\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}=0$, nous trouverons

$$-dT=F\,ds\left(\frac{dy}{ds}\sin\varphi+\frac{dx}{ds}\cos\varphi\right)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(k)$$

équation dans laquelle dT et ds doivent être de signes contraires, parce que T diminue quand s augmente, et qui donnera la valeur de la pression exercée suivant la longueur du solide.

La charge est partout normale à la courbe.

111). Par exemple, si les forces appliquées au solide sont partout normales à la courbe, on a $\sin\varphi=\frac{dx}{ds}$, $\cos\varphi=-\frac{dy}{ds}$; l'équation (k) se réduit à $dT=0$, en sorte que la pression est constante. Il viendra donc par la différenciation des équations (i), $Td\frac{dy}{ds}=-F\,ds\sin\varphi$, $Td\frac{dx}{ds}=-F\,ds\cos\varphi$; d'où et eu égard aux différentielles des valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, $Td\varphi=-F\,ds$ et, parce que $d\varphi=\frac{ds}{\rho}$,

$$\rho=-\frac{T}{F}\ \text{ou}\ T=-\rho F\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(l)$$

c'est-à-dire que le rayon de courbure doit être partout égal à la pression divisée par la valeur de la force normale, rapportée à l'unité de longueur.

Si la force normale était constante, la figure de la courbe devrait être un arc de cercle.

La charge est partout verticale;

112). Par exemple encore, si la force F est partout verticale, les équations (i) et (k) deviennent

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_s^S F\,ds,\quad T\frac{dx}{ds}=Q,\quad -dT=F\,ds\,\frac{dy}{ds}\;\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

ou, quand F sera donnée en fonction de l'abscisse,

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_x^a F\,dx,\quad T\frac{dx}{ds}=Q,\quad -dT=F\,dx.\frac{dy}{ds}\;\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

La composante horizontale de la pression T est constante et égale à Q.

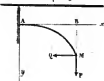
Et de plus égale pour des abscisses égales à 0.

113) Le cas le plus simple est celui où F a une valeur constante p, c'est-à-dire, où le solide est chargé de poids égaux pour des parties égales de l'axe des abscisses. On a alors

$$T\frac{dy}{ds}=P+p(a-x),\quad T\frac{dx}{ds}=Q;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{P+p(a-x)}{Q},\quad y=\frac{1}{Q}\left[Px+p\left(ax-\frac{1}{2}x^2\right)\right]\ldots(4)$$

$$T=Q\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(5)$$

On pourra se donner, outre la position du point extrême M, soit l'ordonnée $DN=NG+GD=g+\frac{1}{2}b$, qui répond à $x=\frac{1}{2}a$, soit l'abscisse $AC=a'$, ou l'ordonnée $CO=b'$ du sommet O, pour lequel $\frac{dy}{dx}=0$; et l'on trouvera facilement les valeurs de P, Q, tang θ, l'équation de la courbe et l'expression générale de T, qu'on appliquera ensuite aux points particuliers A et M.

La courbe s'appuie par une extrémité contre un plan vertical.

114). Si la courbe étant appuyée au point A contre un plan vertical, sa tangente en ce point doit se confondre avec l'axe horizontal Ax; le sens des y positifs sera changé, et comme on aura $\frac{dy}{dx}=0$, $y=0$, pour $x=0$; puis $y=b$, pour $x=a$, il viendra

$$P=-pa,\quad Q=\frac{pa^2}{2b},\quad y=\frac{bx^2}{a^2},\quad T=\frac{pa^2}{2b}\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}\;\ldots\ldots\;(6)$$

et au point extrême M,

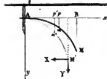
$$\text{tang}\,\theta=\frac{2b}{a},\quad T=\frac{pa}{2b}\sqrt{a^2+4b^2}\;\ldots\ldots\ldots\;(7).$$

La courbe est contenue entre deux appuis horizontaux.

115). On peut évidemment remplacer le point fixe A, par une autre portion de courbe, AM', égale à la première et chargée de même.

Il suit de là qu'un solide courbe MAM', posé sur deux appuis par ses extrémités M, M' et chargé uniformément par rapport à l'horizontale MM', doit avoir la figure de la parabole ordinaire, $y=\frac{bx^2}{a^2}$, pour qu'il ne tende point à fléchir sous la charge. Les valeurs de P et Q seront les efforts verticaux et horizontaux, supportés par les deux appuis; l'expression de T donnera la pression en un point quelconque de la courbe, pression qui sera Q au sommet de la courbe.

Enfin, si l'on supposait la charge uniformément distribuée sur la longueur de la courbe elle-même, la figure propre à l'équilibre serait celle de la courbe connue sous le nom de chaînette.

De la flexion des solides courbes.

116). Considérons maintenant un solide courbe AmM, encastré horizontalement à l'extrémité A, et à l'autre extrémité M duquel sont appliquées les deux forces verticale et horizontale Y, X qui le maintiennent fléchi suivant la nouvelle courbe $Am'M'$; il s'agit de déterminer les circonstances de cette flexion.

Désignons par a, b et a', b' les coordonnées du point extrême M et du point M' dans lequel il se transporte et de même par x, y et x', y' les coordonnées du point quelconque m et de son analogue m'; par s la longueur de l'arc Am; par φ, φ' les angles que forment avec la verticale les normales en m, m', aux deux courbes.

Les raisonnements du N°. 42 s'appliqueront ici : v indiquant encore la distance d'un point de la section transversale du solide à l'axe d'équilibre, il est clair, d'une part, que l'élément de fibre, qui répond à ce point, avait avant la flexion une longueur $ds + v\,d\varphi$, puisque $d\varphi$ est l'angle de deux normales consécutives; d'autre part, qu'après la flexion et abstraction faite de la variation qui peut être survenue dans la longueur de l'arc élémentaire ds, cette longueur devient $ds + v\,d\varphi'$; en sorte que la proportion suivant laquelle l'élément de fibre a été allongé est $\frac{v(d\varphi' - d\varphi)}{ds + v\,d\varphi}$ ou simplement $\frac{v(d\varphi' - d\varphi)}{ds}$; parce qu'en général l'épaisseur des solides étant fort petite par rapport au rayon de courbure, la quantité $v\,d\varphi$ qui revient à $\frac{v\,ds}{\rho}$, est comme infiniment petite en comparaison de ds.

On passera donc de l'équation d'équilibre d'un solide droit, à celle d'un solide courbe, en écrivant dans la première $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, à la place de $\frac{1}{\rho}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$; d'où résulte immédiatement (N°. 46),

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = X(b-y) + Y(a-x) \cdots \cdots (j)$$

et en intégrant

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left[X(b-y) + Y(a-x)\right].$$

Par hypothèse, la flexion du solide ne cessant jamais d'être fort petite, les angles φ' et φ diffèrent très-peu l'un de l'autre et le second membre de l'équation précédente, peut être regardé comme un angle extrêmement petit, égal à son sinus et dont le cosinus est l'unité. En conséquence cette équation donnera

$$\cos\varphi' - \cos\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\sin\varphi \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left[X(b-y) + Y(a-x)\right], \quad \sin\varphi' - \sin\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\cos\varphi \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left[X(b-y) + Y(a-x)\right];$$

Mais, supposé toujours que les fibres du solide ne changent pas de longueur en fléchissant, on a $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$; $\cos\varphi' = \frac{dx'}{ds}$, $\sin\varphi' = \frac{dy'}{ds}$; donc

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\left[X(b-y)+Y(a-x)\right], \quad dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\left[X(b-y)+Y(a-x)\right] \ldots (l)$$

équations qui intégrées feront connaître le déplacement de chacun des points du solide, quand sa figure primitive sera donnée.

Dans les applications, à cause du peu d'amplitude de la courbe du solide, on pourra presque toujours se borner au deuxième terme du développement du radical et l'on ne commettrait même le plus souvent que de légères erreurs en négligeant ce terme.

Les fibres du solide que nous considérons sont tendues, suivant la longueur, par l'action de la force Y et comprimées par l'action de la force X. La tension ou compression produite par l'une de ces forces, en un point quelconque de la courbe, équivaut à cette force décomposée parallèlement à la tangente en ce point. Ainsi T désignant, comme on l'a déjà supposé, une pression, on aura $T = -Y\frac{dy}{ds} + X\frac{dx}{ds}$, ou

$$T = \frac{-Y\frac{dy}{dx} + X}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} \ldots \ldots \ldots \ldots (m)$$

Solide parabolique, chargé à son sommet, et dont les deux extrémités portent sur un plan horizontal.

117) Considérons un solide MAM' de figure parabolique, posé sur un plan horizontal MM', et chargé à son sommet A d'un poids 2R.

Le solide cédera à l'action du poids et son sommet s'abaissera en même tems que ses extrémités s'écarteront l'une de l'autre; mais chaque moitié AM ou AM' sera dans le même état que si étant encastrée horizontalement en A, elle était sollicitée à l'extrémité M ou M', par une seule force verticale R, agissant de bas en haut. Nous aurons en conséquence $y = \frac{bx^2}{a^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$, $Y = -R$, $X = 0$. Si, après avoir développé le radical dans les équations (l), en se bornant au second terme, on intègre et que l'on substitue les valeurs précédentes, on aura les expressions de $x' - x$ et $y' - y$; désignant ensuite par f la quantité dont le point A s'abaisse, par h celle dont le point M ou M' se déplace horizontalement et faisant $x = a$, on trouvera

$$h = \frac{R}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10}\right), \quad -f = \frac{R}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15}\right) \ldots \ldots (1)$$

L'abaissement du sommet est un peu plus grand qu'il ne serait pour un solide rectiligne, à égalité de distance des appuis,

La formule (m) donne à fort peu près

$$T = R\,\frac{2bx}{a^2}\left(1 - \frac{2b^2x^2}{a^4}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

et parce que b est supposé petit en comparaison de a, la plus grande valeur de T répondra aux points extrêmes M et M', où $x = a$.

Les deux extrémités du solide sont retenues par les appuis.

118). Supposons que les appuis ne permettent pas aux extrémités M et M' de s'écarter l'une de l'autre. La résistance horizontale des appuis, représentée par X, se déterminera d'après la condition que les points M, M', n'éprouvent pas de déplacement horizontal; faisant donc $h=0$ dans les intégrales indiquées ci-dessus et qui ont donné les résultats (1), on obtiendra

$$X=R\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}\right),\ f=-\frac{R}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{128}-\frac{23ab^2}{6720}\right)\ldots\ldots (3)$$

Ainsi l'abaissement du sommet, quand la courbe a peu d'amplitude, est à peu près indépendant de la flèche b de cette courbe et en le comparant à la valeur (1) de f (N° 64), on voit qu'il n'est pas $\frac{1}{40}$ de celui que subi-rait un solide rectiligne des mêmes dimensions; mais il faut se souve-nir que le calcul précédent ne tient pas compte de la contraction que doit produire la pression exercée suivant la longueur, et qui contribue avec la flexion à déprimer le sommet de la courbe.

La formule (m), à cause de $Y=-R$; $X=R\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}\right)$ et de la suppression des termes d'ordres supérieurs à $\frac{b^2}{a^2}$, donne

$$T=R\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25bx^2}{16a^3}\right)\ldots\ldots (4)$$

expression dont la plus grande valeur répondant à $x=\frac{16a}{25}$ est

$$T=R\left(\frac{25a}{32b}+\frac{423b}{700a}\right)\ldots\ldots (5)$$

Manière d'avoir égard au poids du solide.

119). Si le solide considéré (N° 116), au lieu d'être sollicité par les forces X et Y, était chargé de poids distribués uniformément par rapport à l'axe Ax, on aurait (N° 62 et 116) l'équation

$$\varepsilon\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\int_x^a p(u-x)\,du\ldots\ldots (n)$$

d'où proviendraient les analogues des équations (l). D'un autre côté, la pression exercée au point m serait égale à la somme des poids qui char-gent la partie mM, décomposés parallèlement à la tangente en m; de là

$$T=-\frac{dy}{ds}\int_x^a p\,du\ldots\ldots (o)$$

Introduisant ensuite des forces X, Y appliquées à l'extrémité M, on pourra revenir au solide considéré (N° 118) et le regarder ou comme char-gé seulement du poids $2pa$, réparti uniformément sur l'intervalle MM', ou comme chargé à la fois de ce poids $2pa$ et du poids $2R$ sus-pendu au sommet A. Dans le premier de ces deux cas, la figure supposée au solide étant celle qui convient à l'équilibre, on trouve $X=\frac{pa^2}{2b}$, $f=0$, résultats conformes à ceux des N°s 114 et 115. Dans le

second cas, la valeur de X sera la somme de la précédente et de celle que nous avons trouvée (N.° 118); pareillement la valeur de T sera la somme des valeurs indiquées (N.° 113 et 118).

Les indications que nous donnons paraissent suffisantes; d'ailleurs, on trouvera dans l'ouvrage de M.r Navier, les développements que nous omettons, pour ne pas dépasser les bornes qui nous sont prescrites.

Des variations produites dans la longueur des solides courbes par les actions exercées suivant cette longueur, et des changements de figure qui en proviennent.

Expression générale de la variation produite dans la longueur des solides courbes, par l'action exercée suivant cette longueur.

120). Dans les questions précédentes nous avons déterminé les valeurs des actions exercées suivant la longueur des éléments des solides courbes. Ces actions occasionnent dans la longueur de ces éléments une variation dont nous avons fait abstraction, mais qui concourt avec la flexibilité du solide à en changer la figure. Comme il ne s'agit ici que de changements très-petits, on pourra les considérer successivement; calculer à part l'effet de chacun d'eux et prendre la somme des résultats obtenus.

Conservons les notations du N.° 116 et nommons s' la longueur de l'arc Am', laquelle est maintenant différente de celle de l'arc Am; l'élément qui répond au point m sera accourci de la quantité $ds-ds'$, par l'action exercée dans le sens de cet élément, et $\frac{ds-ds'}{ds}$ exprimera la proportion de cet accourcissement. Si donc T désignant toujours la pression exercée au point m dans le sens de la longueur du solide, nous représentons par O l'aire de la section transversale, nous aurons $AO\frac{ds-ds'}{ds}=T$; d'où

$$s-s'=\frac{1}{AO}\int dx\,T\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

équation qui détermine la variation de longueur des parties du solide courbe. La figure de ce solide demeurant d'ailleurs à très-peu près la même, il sera facile d'en conclure les déplacements que les points éprouveront par l'effet de cette variation.

Application.

121). Reprenant, par exemple, le solide considéré (N.° 118), remplaçons $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{2bx}{a^2}$ et T par sa valeur (4), dans l'équation (p), et bornons le développement du radical aux termes de l'ordre de $\frac{b^2}{a^2}$, l'intégration donnera $s-s'=\frac{R}{AO}\left(\frac{25ax}{32b}-\frac{bx}{28a}+\frac{bx^2}{a^2}\right)$. Cela posé, soit c la demi-longueur primitive AM et c' la demi-longueur variée AM';

comme on a en même tems $s=c$, $s'=c'$ et $x=a$, il viendra

$$c-c'=\frac{R}{10}\,\frac{25a^2}{32b}\left(1+\frac{216b^2}{175a^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si, de même qu'au nº 115, le solide, toujours de figure paraboli-que, était chargé du poids $2pa$, réparti sur sa longueur, on mettrait pour T sa valeur (6) du nº 114, dans l'équation (p), qui donnerait

$$c-c'=\frac{p}{10}\,\frac{a^3}{2b}\left(1+\frac{4b^2}{3a^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Enfin, si, comme on l'a indiqué nº 119, le solide est chargé à la fois du poids $2pa$ réparti sur sa longueur et du poids $2R$ suspendu à son sommet, l'accourcissement sera la somme des précédents (1) et (2).

Détermination des changements de figure, produits par la variation de longueur.

122). Quant à l'abaissement du sommet de la courbe, résultant de la variation de longueur, il se calculera comme nous allons l'expliquer pour le solide parabolique.

La rectification de la parabole conduit à

$$c=a\left[1+\frac{1}{3.2}\left(\frac{2b}{a}\right)^2-\frac{1}{5.8}\left(\frac{2b}{a}\right)^4+\frac{1}{7.16}\left(\frac{2b}{a}\right)^6-\&^a\right];$$

d'où l'on conclut, par la méthode inverse des séries,

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2=6\left[\frac{c-a}{a}+\frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2-\frac{56}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^3+\&^a\right],$$

et en différenciant

$$\frac{db}{dc}=\frac{3a}{4b}\left[1+\frac{2.9}{10}\,\frac{c-a}{a}-\frac{3.56}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2+\&^a\right].$$

Il s'ensuit que si $c-c'$ est une petite variation de la demi-longueur c et $b-b'$ la variation relative de la flèche b, on a à fort peu près, en se bornant toujours aux termes de l'ordre de $\frac{b^2}{a^2}$,

$$b-b'=\frac{3a}{4b}\left(c-c'\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Résultats de quelques expériences sur la résistance des solides courbes.

123). D'après les expériences de Mr. Duleau (Essai théorique &a. page 44) une pièce de fer forgé, ayant 0,m06 de largeur et 0,m02 de hauteur, a été courbée à froid suivant un arc de cercle de 6,m31 de corde et 0,m7 de flèche. Cette pièce étant posée verticalement entre deux appuis qui ne permettaient pas aux extrémités de s'écarter, l'action de son propre poids n'en changeait pas sensiblement la figure.

La flèche de l'arc étant de 0,m709 et la pièce étant successivement char-gée au milieu de 20, 120, 220, 260 et 280 Kg, ce point s'est abaissé successive-ment de 4, 34, 68, 89 et 112 millimètres. La pièce a totalement fléchi sous un poids de 288 Kg.

Dans une autre expérience, la flèche de l'arc étant de 0,m694 et la pièce étant successivement chargée au milieu de 50, 100, 150, 200 et 250 Kg, ce point s'est abaissé successivement de 10, 22, 39, 57 et 92 millimètres. Les poids étant ôtés le sommet de la courbe est resté de 0,m024 plus bas qu'il n'était avant l'expérience. La pièce a fléchi sous un poids de 270 Kg qui n'avait pas été placé tout-à-fait au milieu.

La même pièce était près de fléchir sous deux poids de 280 et 285 ^{kg}, placés de chaque côté, à $\frac{1}{6}$ de la longueur, à compter des extrémités.

La même pièce ayant été chargée successivement à $\frac{1}{4}$ de la longueur, à partir de l'une des extrémités, d'un poids de 20 et de 100 ^{kg}, et la flèche primitive étant de $0^m,696$, le point chargé s'est abaissé de 8 et de 65 millimètres. Le sommet de la courbe s'est d'abord un peu soulevé, puis s'est abaissé quand la charge a atteint 150 ^{kg}. La pièce a fléchi sous un poids de 177 ^{kg}.

Des solides d'égale résistance.

Notions préliminaires.

124). En général, lorsqu'un solide cylindrique est soumis à un effort qui tend à le fléchir, il existe dans la longueur un point où le solide est plus sujet à se rompre qu'en tout autre, et si la résistance est suffisante en ce point, elle est excessive partout ailleurs. On peut donc se proposer de donner à un solide une figure telle qu'il ait en chaque point de sa longueur, précisément la force nécessaire. On appelle solides d'égale résistance ceux dont la figure satisfait à cette condition.

Les recherches de ce genre ne présentant point de difficulté, il suffira de quelques exemples.

Solide encastré horizontalement par une des extrémités.

125). Un solide encastré à l'extrémité A et chargé d'un poids P à l'autre extrémité B, a sa face supérieure dans un plan horizontal et ses deux faces latérales dans des plans verticaux parallèles, il s'agit de déterminer sa face inférieure.

Désignons par a la largeur; par b la hauteur AM à l'extrémité encastrée; par c la longueur AB et par x, v l'abscisse Bp et l'ordonnée pm du profil BM de la face inférieure.

D'abord la hauteur b sera déterminée (N.^{os} 53 et 61) par l'équation $B\frac{ab^2}{6}=cP$; d'où

$$b=\sqrt{\frac{6cP}{Ba}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ensuite, la courbe BmM sera déterminée par l'équation $B\frac{av^2}{6}=Px$, ou

$$v^2=\frac{b^2x}{c},$$

qui exprime une parabole dont l'axe est BA.

(*) Pour déterminer la figure que le solide affecterait s'il fléchissait sous la charge P, on observera que $A\frac{av^3}{12}=A\frac{ab^3x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}}$ étant (N.° 53) le moment d'élasticité de la section quelconque pm et y l'ordonnée de la courbe affectée par le solide, l'équation d'équilibre (N.° cité) devient $A\frac{ab^3x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=Px$; d'où $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{A}\,\frac{24c^{\frac{3}{2}}}{ab^3}\left(x^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)$, ...

$$y=\frac{P}{A}\frac{24c^{\frac{3}{2}}}{ab^3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{3}c^{\frac{3}{2}}\right) \text{ et}$$

$$f=\frac{P}{A}\frac{8c^3}{ab^3};$$

(*)

ainsi, l'abaissement du point extrême B est deux fois plus grand que si toutes les sections du solide avaient la même hauteur b.

Lorsque le solide est chargé d'un poids réparti uniformément sur la longueur, et qui soit p pour l'unité, on a $B\frac{ab^2}{6}=pc.\frac{1}{2}c$; d'où

$$b=c\sqrt{\frac{3p}{Ba}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

puis $B\frac{av^2}{6}=px.\frac{1}{2}x$; d'où

$$v=\frac{bx}{c},$$

équation d'une droite.

Si le solide n'était chargé que de son propre poids, qui fût p pour l'unité de volume, alors x' et v' désignant l'abscisse et l'ordonnée d'un point m' pris entre B et m, on aurait $p\int_0^x dx'(x-x')v'=\frac{B}{6}v^2$. Différenciant deux fois de suite par rapport à x, il viendra $p\int_0^x dx'.v'=\ldots$ $\frac{B}{6}\frac{d.v^2}{dx}$, $pv=\frac{B}{6}\frac{d^2.v^2}{dx^2}$, équation dont l'intégrale (Lacroix, N.° 274),

$$v=\frac{px^2}{2B}$$

exprime une parabole dont l'axe est Bv.

(*)

Il n'y a pas plus de difficulté lorsque les sections transversales du solide sont des cercles dont les plans se trouvent perpendiculaires à une même droite horizontale et les centres sur cette droite, quand ces sections sont des rectangles semblables, quand la loi des longueurs ou des hauteurs est donnée &.ª

Quant à la figure qu'affecterait dans la flexion le solide chargé sur tous les points de la longueur, on trouve, pour l'un et l'autre cas, des équations transcendantes qui donnent v infini, pour $x=0$; résultats inadmissibles, comme contraires à l'hypothèse d'une flexion très-petite.

Solide posé sur deux appuis de niveau.

126. Lorsque le solide est posé horizontalement sur deux appuis B, B' et chargé en M d'un poids 2P; en désignant par b la hauteur AM, au point de suspension du poids; par c le demi-intervalle CB des appuis et par γ la distance AC, on aura $B\frac{ab^2}{6}=P\frac{c^2-\gamma^2}{c}$; d'où

$$b=\sqrt{\frac{6P(c^2-\gamma^2)}{Bac}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

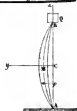
et les deux courbes BM, B'M seront des portions de paraboles dont l'axe commun est BB'.

Supposons que le poids 2P pouvant être suspendu à un point quelconque de l'intervalle BB', le solide doive toujours résister à son action; l'ordonnée de la courbe de la face supérieure devra

satisfaire à l'expression (3) de b, laquelle représente une ellipse dont le demi-petit axe est $\sqrt{\frac{6Pc}{Ba}}$. Or, comme cette ellipse enveloppe les paraboles qui terminent le solide quand on donne au poids des situations particulières, il s'ensuit que, sur elle, le solide acquerra un excès de résistance partout ailleurs qu'au point où le poids est suspendu.

Si le solide était chargé de poids distribués uniformément sur la longueur, il devrait être terminé en dessus par deux faces planes et l'épaisseur au milieu serait donnée par l'expression (2) de b.

Et s'il n'était chargé que de son propre poids, il serait terminé en dessus par deux portions égales de paraboles, dont les axes seraient les verticales passant par les points d'appui. L'épaisseur au milieu serait $\frac{pc^2}{2B}$, p étant le poids de l'unité de volume du solide et c le demi-intervalle des appuis.

Solide chargé de bout.

127). Considérons en dernier lieu, un solide posé verticalement et chargé d'un poids Q sur l'extrémité supérieure, en admettant que toutes les sections transversales soient circulaires.

Désignons par c la demi-longueur $AC = BC$; par x, y les coordonnées Cp, pm de la courbe que l'axe affecte; par f la flèche CM de cette courbe et par r le rayon de la section transversale en m.

Supposons que le solide ne prenne qu'une petite courbure à l'instant où il est près de se rompre, nous pourrons simplifier la question en assimilant cette courbure à celle d'un arc de parabole dont l'équation serait $y = f\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)$; alors nous aurons $B\frac{\pi r^3}{4} = Qy$, ou

$$r^3 = \frac{4Qf}{\pi B}\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right).$$

Le solide sera donc d'égale résistance, pourvu que r soit proportionnel à $\sqrt[3]{c^2 - x^2}$. Le diamètre des sections diminue du milieu aux extrémités qui se terminent en pointe.

En consolidant convenablement les extrémités des solides qu'on met en œuvre, il est souvent utile de se rapprocher des formes d'égale résistance, lesquelles sont particulièrement propres au fer fondu et aux pièces soumises à des efforts dirigés perpendiculairement à la longueur. Quant aux pièces comprimées suivant la longueur, il convient, quand la longueur est grande par rapport à l'épaisseur, d'augmenter cette épaisseur vers le milieu; mais il faut toujours conserver aux extrémités des dimensions telles que la pression ne puisse les écraser. Il est même avantageux, dans beaucoup

de cas, de donner à ces extrémités la forme d'une embase, qui s'applique contre les plans entre lesquels le solide est contenu. Cette disposition tend à procurer au solide le surcroît de résistance qu'il acquiert quand les extrémités sont encastrées (N.° 87).

Des solides formés de plusieurs pièces assujetties entre elles.

De la résistance des solides composés; exemples les plus utiles.

128). Lorsqu'un solide est composé de plusieurs pièces, la résistance dont il est capable s'évalue différemment, selon la manière dont ces pièces sont assujetties les unes aux autres. Nous parcourrons les cas les plus remarquables.

Si le solide est l'assemblage de plusieurs pièces superposées, assujetties par des brides qui les retiennent en contact, sans s'opposer à ce que les points correspondants des faces contiguës se déplacent les uns par rapport aux autres, dans la flexion de l'assemblage; la résistance du système sera la somme des résistances que les pièces offriraient séparément.

Supposant donc que la section transversale des pièces soit rectangulaire, désignons par a la largeur commune de ces pièces; par b la hauteur de chacune et par n leur nombre; il est clair (N.° 53), qu'abstraction faite du frottement provenant de la force avec laquelle les pièces sont serrées les unes contre les autres, l'expression du moment d'élasticité sera

$$\alpha = nA\frac{ab^3}{12} \quad \ldots \quad (1)$$

et celle du moment de rupture,

$$\beta = nB\frac{ab^2}{6} \quad \ldots \quad (2)$$

La résistance du système est la même soit que l'on superpose les pièces dans le sens de la flexion soit qu'on les place les unes à côté des autres.

Si les pièces assemblées étaient partagées en plusieurs parties dans leur longueur, le moment d'élasticité n'aurait pas la même valeur aux différents points de la longueur du système. Dans la partie m m le moment d'élasticité est la somme des moments des trois pièces superposées; dans la partie n n, il est seulement la somme des moments de deux de ces pièces. Il faut, autant qu'il est possible disposer les joints de manière qu'ils ne se trouvent point vis-à-vis les uns des autres, et, sous cette condition, on pourra regarder la résistance du

système à la flexion ou à la rupture, comme égale à la somme des résistances des pièces superposées, moins une.

Quelquefois même, on peut, si les points sont disposés convenablement, regarder la résistance du système comme égale à la somme des résistances des pièces superposées. Par exemple, quand le solide, composé de trois pièces superposées, est encastré à une extrémité et chargé à l'autre, la résistance au point d'encastrement équivaut à la somme des résistances des trois pièces. Aux points m, n que l'on suppose à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{2}{3}$ de la longueur, la résistance est seulement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de la précédente : mais comme l'action du poids pour causer la flexion ou la rupture, en ces points, est également $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de l'action de ce poids au point d'encastrement, l'assemblage offre partout une résistance au moins égale à celle qui s'exerce à ce dernier point. On pourrait évidemment supprimer ici les portions des pièces supérieure et inférieure, qui sont au-delà du point n, sans altérer la résistance du système à la rupture.

La résistance, soit à la flexion soit à la rupture, d'un solide formé de pièces assemblées à crémaillère ou unies par des clefs que des brides serrent fortement, ne différera pas sensiblement de celle d'une seule pièce des mêmes dimensions.

Si l'assemblage était formé de deux pièces séparées, mais assujetties entre elles de manière qu'une ligne tracée, avant la flexion, perpendiculairement à la longueur, dût devenir, après la flexion, une normale commune aux courbes affectées par les deux pièces, la résistance à la flexion s'obtiendrait en retranchant du moment d'élasticité du solide, regardé comme plein, le moment d'élasticité du solide qui occuperait l'intervalle des deux pièces.

Soit donc a la largeur commune des deux pièces, b' la hauteur de l'assemblage et b'' celle de l'intervalle ; les expressions des moments d'élasticité et de rupture seront respectivement

$$\alpha = A\,\frac{a(b'^3 - b''^3)}{12}, \qquad \beta = B\,\frac{a(b'^3 - b''^3)}{6b'} \quad \ldots\ldots\ (3).$$

L'hypothèse sur laquelle ces formules sont fondées ne peut être réalisée, qu'autant que les deux pièces, supposées parallèles, sont assujetties l'une à l'autre par un système de traverses et de croix, ou par des clefs logées dans des entailles, comme l'indique la figure ci-dessus.

Mais si l'une des pièces est courbée ou si elles le sont toutes deux, et si ces pièces sont assujetties aux extrémités de manière à ne pouvoir

glisser l'une sur l'autre, il suffira qu'elles soient réunies par des traverses pour que les formules (3) conviennent au système.

Il sera avantageux, dans chaque cas particulier, de régler la courbure des pièces de manière à rendre le système d'égale résistance (Nº 124).

Dans les deux derniers systèmes, chaque pièce, selon qu'elle est placée du côté qui devient concave ou convexe lors de la flexion, ne résistant qu'à une compression ou une tension exercée suivant la longueur, peut être formée de plusieurs parties ou mises bout-à-bout et maintenues dans le prolongement les unes des autres, ou liées entre elles par des assemblages capables de la même résistance que la pièce. Une pareille division des pièces supérieure et inférieure n'altèrera pas sensiblement la force du système.

Lorsqu'on connaît la nature des efforts auxquels les pièces sont exposées dans les assemblages de ce genre, on peut choisir pour chacune, la matière qui convient le mieux. Ce choix est déterminé par la condition d'obtenir une résistance donnée avec la moindre dépense possible. En comparant les résistances respectives du fer fondu et du fer forgé à la compression et à l'extension avec les prix de ces matières, on jugera qu'il est toujours avantageux d'employer le fer fondu pour les pièces comprimées et le fer forgé pour les pièces tendues. On trouve aussi plus de sécurité dans cette disposition, quand l'édifice est exposé à des secousses, parce que le fer forgé peut souvent se prêter, sans se rompre, à une extension subite, qualité dont le fer fondu est presque entièrement dénué.

Le bois de chêne ou de sapin, comprimé ou tendu, coûte beaucoup moins, à égale résistance, que le fer forgé ou fondu et il est moins sujet à rompre par l'effet des chocs; mais il est moins durable, quand il est exposé à l'humidité.

Expériences sur la résistance des Solives composées de plusieurs pièces assujetties entre elles.

129). Suivant quelques expériences de Mr Aubry (ouvrage cité, page 65), un barreau de bois de chêne, de 1^{po} de largeur, $2^{po}\frac{1}{2}$ de hauteur, posé horizontalement sur deux appuis distants de 5^{pi} et chargé au milieu, a rompu sous un poids de 755^{lb}, produisant une flèche de 2^{po}.

Un autre barreau du même bois, de 1^{po} de largeur, 2^{pou} de hauteur, formé de trois pièces entaillées de 3^{li} de 6 en 6^{po}, et serrées par des boulons de $1^{li}\frac{1}{2}$ de diamètre; posé et chargé comme le précédent; a rompu sous un poids de 475^{lb}, produisant une flèche de $3^{po}\ 2^{li}$.

Ainsi, le second barreau était à peu près aussi fort que s'il eût été d'une seule pièce.

Les expériences de Mr Duleau (ouvrage cité, page 60), ont donné les résultats suivants. Les pièces toutes de $0^m,06$ de largeur, étaient posées horizontalement sur deux appuis et chargées au milieu. Les boulons, au moyen desquels ces pièces étaient assemblées, avaient $0^m,02$ de diamètre et étaient espacés de $0^m,4$. Les résultats sont ramenés par le calcul à la flèche de la courbure affectée par chaque pièce sous une charge de 10^{kg}.

Pour le système formé par des pièces en croix, la résistance à la flexion diffère peu de celle qu'on trouve par la formule (3). Quant aux pièces simplement serrées par des boulons, la résistance est plus petite et d'autant plus que l'intervalle des pièces est plus grand ; ce qui doit être attribué à la flexion des boulons.

Indication des pièces	Intervalle des appuis.	hauteur totale	hauteur du vide	Flèche de courbure
	mètres.	millimètres.	millimètres	millimètres.
Deux pièces de fer du Périgord, posées à plat, et superposées sans boulons	2	21,1	0	7
Les mêmes posées à plat, serrées par des boulons	4	21	0	11,3
Les mêmes écartées de $0^m,011$, au moyen de cales serrées par les boulons	4	32	11	4,57
Les mêmes écartées de $0^m,021$ par le même moyen	4	42	21	2,6
Les mêmes écartées de $0^m,032$ par le même moyen	4	53	32	1,8
Les mêmes écartées de $0^m,153$ au moyen de pièces en croix	5,8	174	153	0,273
Deux pièces de fer du Périgord, serrées l'une sur l'autre par des boulons	4	40	0	2,2

De l'usage des armatures pour consolider les pièces, les prolonger ou les joindre bout à bout.

Des armatures propres à consolider les pièces, les prolonger ou les joindre bout-à-bout.

130) On peut consolider des pièces en bois au moyen d'armatures en fer. Quand une pièce supporte un effort dirigé perpendiculairement à sa longueur, la meilleure disposition consiste à encastrer dans les faces latérales de cette pièce, un assemblage formé d'une pièce courbe et d'un tirant rectiligne, dont les extrémités sont assujetties l'une à l'autre. Que l'on encastre un pareil assemblage entre deux pièces de bois posées l'une à côté de l'autre, et serrées

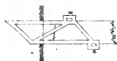
par des boulons: si le contact établi entre les points du fer et du bois se maintient exactement dans la flexion; ou si, pour plus de sûreté, l'assemblage en fer est consolidé par des traverses, la résistance du système, équivaudra à la somme des résistances de la pièce en bois et de l'assemblage en fer. Le tirant rectiligne devra être en fer forgé et la courbe en fer fondu.

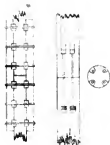
Lorsque des pièces doivent être soumises à un effort dirigé perpendiculairement à leur longueur, on peut les prolonger ou en assujettir deux dans le prolongement l'une de l'autre, d'une manière très-solide, en employant une portion de tuyau, dans lequel les extrémités des pièces seraient contenues et fortement serrées. Mais comme la paroi intérieure du tuyau ne serait pas pressée sur toute son étendue, il y a lieu d'en supprimer une partie et de simplifier la disposition, sans en abandonner le principe.

Par exemple, une pièce de bois, qui doit être encastrée horizontalement, peut être prolongée dans l'encastrement au moyen de deux armatures en fer fondu, appliquées contre les faces latérales et réunies en m, n par des traverses. Les faces supérieure et inférieure de la pièce doivent être serrées fortement contre ces traverses avec des cales ou des vis de pression. Par cette disposition, la pièce ne peut céder à un effort dirigé de haut en bas qu'en rompant au-dessus de la traverse n.

L'armature indiquée en marge servirait à prolonger une pièce destinée à porter un poids à son extrémité, et étant renversée, elle pourrait former les extrémités d'une poutre dont les portées seraient détériorées.

Enfin, l'armature représentée dans cette figure peut être employée pour assujettir l'une au bout de l'autre deux pièces dont on voudrait n'en faire qu'une, ou pour consolider une poutre que la charge aurait fait rompre. Mais la réussite n'est pas aussi assurée dans le second cas que dans le premier, parce qu'alors l'armature se trouvant dans la partie où la pièce tendrait à prendre la plus grande courbure, il faudrait un contact beaucoup plus parfait entre la pièce et l'armature, pour qu'il n'y eût pas de flexion sensible.

Dans ces appareils, la résistance des armatures peut être évaluée par la formule (3). Il est nécessaire que les portions de surface sur lesquelles la pression s'établit soient assez grandes pour

que le bois ne s'y comprime pas sensiblement. La valeur de la pression sera toujours facile à calculer. Dans l'anté-pénultième figure, par exemple, la pression en m doit faire équilibre autour du point n au poids dont la pièce est chargée; la pression en n est égale à la somme de ces poids et de la pression exercée en m.

Les deux parties d'une pièce exposée à fléchir transversalement de haut en bas peuvent encore être réunies de la manière indiquée ci-contre, au moyen d'une pièce juxtaposée en-dessous, assujettie par des clefs de bois dur, pénétrant dans des entailles et serrées par des brides. En effet, les fibres, lors de la flexion, sont comprimées dans la partie supérieure a m de la section transversale, et étendues dans la partie inférieure a n. Le joint m n ne nuit pas (N.° 83) à la résistance des fibres comprimées et la résistance des fibres étendues, qui se trouvent coupées, est suppléée par celle de la pièce appliquée par dessous. On peut déterminer la force de cette pièce par la condition que le moment de la résistance de ses fibres, pris par rapport à l'axe d'équilibre a, soit égal au moment des fibres coupées dans l'intervalle a n, pris par rapport au même axe.

Quant aux pièces placées dans le prolongement l'une de l'autre et exposées à une tension longitudinale, on peut les assembler au moyen de pièces juxtaposées, assujetties par des clefs et des brides. On peut aussi employer des tirants de fer, soit en les encastrant dans le bois, soit en les plaçant en dehors et les fixant à des traverses. Dans tous les cas, les pièces réunies sont nécessairement affaiblies au point de jonction, attendu que la section transversale est diminuée par l'effet des entailles. On doit donner aux tirants une force égale à celle qui reste au bois, et il faut que la surface de bois sur laquelle ces tirants prennent un appui soit assez grande pour qu'il n'y ait pas écrasement, et que l'adhésion latérale des fibres qui tendent à se détacher ne puisse être rompue.

Des plus grands efforts auxquels les matériaux puissent être soumis avec sécurité dans les constructions.

Complément des données nécessaires à l'application de la théorie.

131). La théorie que nous avons exposée, fait connaître les lois de la flexion et de la rupture des corps, c'est-à-dire, les degrés de courbure et de tension qu'un solide affecte sous un effort donné et

l'effort capable de rompre ce solide. Cette connaissance ne met pas encore à même de régler les dimensions des corps employés dans les constructions : il faut en effet pouvoir s'assurer, non seulement que les efforts auxquels chaque solide est soumis, n'en causeront point immédiatement la rupture ; mais aussi que la permanence ou la répétition fréquente de ces efforts, ne produira point dans les parties de l'édifice des altérations qui puissent avec le temps faire des progrès et en amener la destruction. D'ailleurs on doit autant qu'on le peut, disposer les constructions, de manière à n'y laisser d'autres causes de dépérissement que celles qui dépendent des altérations chimiques des corps, et s'efforcer de prévenir ces altérations par des procédés d'entretien. La détermination des plus grands efforts auxquels les matériaux peuvent être soumis avec sécurité, dans les constructions, n'est pas susceptible d'une précision rigoureuse ; nous allons exposer les principaux résultats que l'expérience a fournis sur ce sujet.

Limites des efforts relatives à l'écrasement et à l'extension — pierre ;

132). Les petits cubes de pierre soumis à l'expérience commencent à se fendiller sous des poids un peu plus grands que la moitié de ceux qui sont indiqués dans les tables comme ayant produit l'écrasement. D'ailleurs, une force moindre peut (Rondelet, tome III, page 101) opérer l'écrasement, lorsque son action s'exerce pendant longtems. Mr. Rondelet (tome III, page 74) donne l'indication suivante des pressions exercées sur une surface de 25 centimètres carrés, dans les constructions regardées comme les plus hardies ;

Piliers du Dôme de St. Pierre de Rome	409 kg
Piliers du Dôme de St. Paul de Londres	484
Piliers du Dôme des Invalides	369
Piliers du Dôme de Ste. Geneviève	736
Colonnes de St. Paul, hors des murs, à Rome	494
Piliers de la tour de l'église de St. Méry	735
Colonnes de l'église de Toussaint d'Angers (*)	1107

Les assises inférieures des piles du pont de Neuilly, qui sont construites en pierre de Saillancourt, supportent une pression de 3540 lb par pied carré. Un cube de cette pierre, dont le côté a 2 po, exige, pour être écrasé, un effort de plus de 10000 lb.

D'après l'expérience des constructions, on ne doit pas exposer les pierres à une plus grande pression que $\frac{1}{10}$ de celle qui produit l'écrasement.

(*) Elles sont construites avec une pierre calcaire d'un gris roussâtre, coquilleuse et très-dure. Un cube de 0m,05 de côté s'écrase sous 109 kg.

dans les essais faits sur de petits cubes; et même cette détermination ne donne une entière sécurité que si les pierres sont taillées et posées de manière que la pression se distribue uniformément sur toute la surface des joints et si, par leur qualité, elles ne sont pas sujettes à se fendre et à s'éclater; autrement, il faudrait réduire l'effort.

Bois.

133). Il suit des expériences rapportées (N.os 27 et 35) que les résistances opposées à l'écrasement et à l'extension par les fibres du bois, diffèrent beaucoup entre elles; la première n'étant pas la moitié de la seconde. Cette circonstance s'accorde avec les remarques du N.° 83. Pour le bois de chêne ou de sapin, on peut évaluer à environ 3 kg, par millimètre carré de la section transversale, la résistance à l'écrasement, et à environ 8 kg la force de cohésion. Les pièces employées dans les constructions ne doivent pas être exposées à des pressions plus grandes que $\frac{1}{5}$ de celles qui causeraient l'écrasement. Cette règle peut servir à déterminer les dimensions et l'espacement des pieux de fondation: elle s'accorde avec les préceptes de Perronet, (Œuvres, mémoire sur les pieux et pilotis) fondés sur l'expérience, suivant lesquels, des pieux de 0m,25 et de 0m,32 de diamètre ne doivent pas être chargés de plus de 25 000 kg et 50 000 kg.

Fer forgé.

134). Les expériences rapportées (N.° 36) apprennent que les barres de fer forgé, tirées suivant leur longueur sont rompues par un effort moyen de 40 kg, par millimètre carré de la section transversale. Un examen attentif des résultats des expériences et l'exemple des constructions font voir que ces barres ne doivent pas être soumises à une charge permanente plus grande que 6 à 7 kg, par millimètre carré, et à une charge totale, composée d'une partie permanente et d'une partie accidentelle, plus grande que 8 à 10 kg, par millimètre carré.

Fer fondu.

135). Les pièces de fer fondu, qui sont trop courtes pour pouvoir plier, offrent une grande résistance à l'écrasement. Il résulte des expériences rapportées (N.° 29) que la force capable d'opérer l'écrasement est environ 100 kg, par millimètre carré. On ne connaît pas d'expériences d'après lesquelles on puisse apprécier exactement la limite des charges que les pièces peuvent supporter dans les constructions: mais il est très-vraisemblable que ces charges peuvent être portées à $\frac{1}{4}$ de celles qui produiraient l'écrasement

Selon les expériences (N.° 38), la force de cohésion du fer fondu est de 13 à 14 kg par millimètre carré, beaucoup moindre que la résistance à l'écrasement. Les charges peuvent pareillement être portées

dans les constructions, à $\frac{1}{4}$ de celles qui causeraient la rupture. Mais des pièces de fer fondu, employées de cette manière, présenteraient peu de sécurité, si la construction était exposée à de fortes secousses.

Séparation des cas de la résistance à l'écrasement et de la résistance à la flexion.

136). Les solides destinés dans les constructions à supporter une pression dirigée parallèlement à leur longueur, sont ordinairement trop courts comparativement à leur grosseur pour qu'ils puissent céder en offrant le genre de flexion, auquel s'appliquent les résultats des N.os 85 à 88. La résistance de ces solides doit être déterminée par d'autres considérations. En effet le moindre poids qui peut maintenir fléchi, un solide rectangulaire chargé verticalement est exprimé (N.° 85) par $Q = A\frac{\pi^2 a b^3}{12 c^2}$, c'est-à-dire que le moindre poids dont on puisse charger l'unité superficielle de la section transversale, est

$$A\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{b^2}{c^2}.$$

Or, en supposant $A = 1000000000^{kg}$, pour le bois de chêne, et $A = 20000000000^{kg}$, pour le fer forgé; et comparant les résultats donnés par la formule précédente, avec ceux des expériences de M.r Rondelet, rapportés (N.os 93 et 95) on trouvera que les premiers sont plus grands que les seconds, lorsque l'épaisseur b surpasse $\frac{1}{20}$ environ de la longueur c. Par conséquent, pour les pièces dont la longueur est au-dessous de 20 fois l'épaisseur, c'est-à-dire, dans la plupart des cas de la pratique, la résistance ne doit pas être déterminée par la formule précédente, mais par la considération du poids qui pourrait écraser la pièce.

Le poids capable d'écraser ou de comprimer une pièce dont la longueur est égale à une ou deux fois l'épaisseur, peut être évalué, par chaque millimètre carré de la section transversale, à

3^{kg} pour le bois de chêne et de sapin,
40 . . . . . fer forgé,
100 . . . . . fer fondu.

On conclut des expériences rapportées (N.° 91):

1.° que, pour les bois, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{5}{6}$, lorsque la longueur de la pièce est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié, quand cette longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

2.° que, pour le fer forgé, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{7}{8}$, quand la longueur est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié, quand la longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

3.° que, pour le fer fondu, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{2}{3}$ à peu près, quand la longueur est égale à 4 fois l'épaisseur, à moitié environ, quand la longueur est égale à 8 fois l'épaisseur

et à $\frac{1}{15}$, lorsque la longueur est égale à 36 fois l'épaisseur.

Les expériences connues ne fournissent pas le moyen d'évaluer avec exactitude la résistance dans les cas intermédiaires, différents de ceux qu'on vient de spécifier.

Quant aux pièces dont la longueur surpasserait 20 fois environ l'épaisseur, on peut en évaluer la résistance par les formules des Nos 85 à 88, avec la certitude que cette évaluation n'excèdera pas les résultats donnés par les expériences.

Lorsque dans les applications on aura évalué, conformément aux principes précédents, la résistance dont un solide chargé verticalement est susceptible, on pourra, pour en conclure le plus grand poids dont ce solide puisse être chargé avec sécurité dans les constructions, réduire les résultats à $\frac{1}{10}$ environ, pour le bois, à $\frac{1}{4}$ ou à $\frac{1}{5}$ pour le fer forgé ou fondu.

Limites des efforts relativement à la flexion transversale.

137). La limite des efforts auxquels un solide susceptible de fléchir peut être exposé dans les constructions, doit être déterminée par la condition que la flexion produite par ces efforts et les allongements ou accourcissements des fibres longitudinales, qui en résultent, ne soient pas capables d'altérer la constitution physique du solide; en sorte que ce solide étant déchargé, reprenne sa figure naturelle et que sa courbure n'augmente pas avec le tems.

Nous désignerons par B' le plus grand effort que l'on doive faire supporter aux fibres longitudinales d'un corps, sur l'unité superficielle, et par λ l'allongement ou l'accourcissement des fibres, qui répond à cet effort; la proportion $1 : \lambda :: A : B'$, donnera $B' = A\lambda$.

Bois.

138). Il n'existe pas d'expériences spéciales qui fassent connaître avec certitude, pour le bois, la limite dont il s'agit. D'après les résultats consignés (No 81) la valeur moyenne de la constante B, pour le bois de chêne, est à peu près $B = 6\,000\,000^{k}$. L'expérience des constructions apprend que l'on ne doit pas faire supporter aux bois des charges qui surpassent $\frac{1}{10}$ de celles qui causeraient la rupture (Rondelet, tome IV, page 83); on aura donc, pour le bois de chêne, ... $B' = 600\,000^{k}$. On calculera, dans chaque cas, les plus grandes charges auxquelles une pièce puisse être exposée, en mettant cette valeur de B' au lieu de celle de B, dans les formules des Nos 61 à 72, relatives à la rupture.

Si conformément aux expériences (No 77), on suppose $A = 1\,000\,000\,000^{k}$, pour le bois de chêne, une charge de $600\,000^{k}$ produira dans la longueur des fibres une variation $\lambda = 0{,}0006$, et cette variation

devait être regardée comme la plus grande qu'il fût possible de produire, sans altérer l'élasticité naturelle de ce bois.

La force du sapin jaune ou rouge est au moins égale à celle du chêne : celle du sapin blanc est un peu moindre.

Fer forgé.

139). En supposant conformément au N° 134, que la limite des flexions qu'on laissera prendre aux pièces, est déterminée par la condition que l'extension des fibres soit due seulement à une charge de 10 kg par millimètre carré, on devra prendre, pour le fer forgé, $B' = 10\,000\,000^{kg}$ et calculer les plus grandes charges à faire supporter aux pièces, par les formules des N^os^ 61 à 72, relatives à la rupture, en mettant à la place de B, cette valeur de B'.

On a, pour le fer forgé, $A = 20\,000\,000\,000^{kg}$ (N° 78) ; par conséquent la charge de $10\,000\,000^{kg}$ occasionne dans les fibres une variation λ de longueur, exprimée par 0,0005 que l'on regarde ici comme la limite de celles que l'on peut produire, sans altérer la constitution du fer. Mr Duleau (Essai, page 79) a pris $\lambda = 0{,}0003$, fraction qui répond aux moindres valeurs indiquées par ses expériences et dont la moyenne est à peu près 0,00065. Ce dernier allongement serait produit par une charge de 13 kg par millimètre carré, égale à $\frac{1}{3}$ de celle qui causerait la rupture (N° 134)

Fer fondu.

140). Suivant les expériences rapportées (N° 82), la valeur de B, qui convient à la fonte de bonne qualité est moyennement $B = \ldots\ 28\,000\,000^{kg}$. On peut charger les pièces jusqu'à $\frac{1}{4}$ du poids qui causerait la rupture, ou prendre $B' = 7\,000\,000^{kg}$. Les plus grandes charges auxquelles il soit possible de soumettre les pièces en fer fondu, se calculeront pareillement par les formules des N° 61 à 72, relatives à la rupture et dans lesquelles on remplacera B, par cette valeur de B'.

Supposé que l'on ait, pour la fonte douce, conformément aux expériences consignées (N° 80), $A = 11\,000\,000\,000^{kg}$; une tension de $7\,000\,000^{kg}$, répondra à un allongement $\lambda = 0{,}00064$, que l'on regarde ici comme la limite de ceux auxquels on peut exposer le fer fondu sans en altérer la constitution.

Expression de la limite des efforts ; 1° quand leur direction est perpendiculaire à la longueur du solide ;

141). Le solide étant posé horizontalement sur deux appuis et chargé au milieu, l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture (N° 61) est $\beta = cP$. Supposons que la section transversale soit rectangulaire, nous aurons $\beta = B\frac{ab^2}{6}$ et l'équation d'équilibre donnera $2P = B\frac{ab^2}{3c}$; maintenant, si l'on substitue B' ou $A\lambda$ à B, il viendra

$$2P = A\frac{\lambda a b^2}{3c} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

c'est l'expression de la limite des poids dont on peut charger le solide, sans que son élasticité soit altérée.

En prenant avec M.r Duleau, pour le fer forgé, $A = 20\,000\,000\,000$, $\lambda = 0{,}0008$, on trouve

$$2P = 2{,}000\,000\ \frac{a b^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

résultat qui coincide avec celui que cet auteur a donné (Essai théorique 8.° page 79).

2.° quand il sont dirigés en tout ou en partie, suivant la longueur du solide :.

142). Mais quand le solide est soumis à un effort dirigé en tout ou en partie suivant sa longueur, l'expression de la limite ne peut plus se conclure exactement de l'équation d'équilibre et doit être déterminée directement, comme nous allons l'expliquer.

On remarquera qu'en général 1.° en vertu de la composante X de l'effort, les fibres sont d'abord comprimées ou allongées également sur toute l'étendue de la section transversale ; 2.° par l'effet de la courbure la compression se trouve ensuite diminuée à la face convexe et augmentée à la face concave. Alors on pourra régler la flèche de courbure et par suite l'effort, d'après la condition que le plus grande compression ou extension n'excède pas la limite λ.

Cas où le solide est chargé de bout ;

143). Revenons d'abord au solide chargé de bout : soit O l'aire de la section transversale ; $\frac{Q}{AO}$ exprimera évidemment la compression commune à toutes les fibres ; d'ailleurs $\frac{V}{\rho}$ ou $-V\frac{d^2y}{dx^2}$ exprime, pour un point quelconque, la compression des fibres, due à la flexion (N.° 42). Or (N.° 25) le maximum de cette quantité, lequel répond à $x = \frac{1}{2}c$ ou $y = f$, est Qf ou $Q\frac{s\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-\frac{\alpha\pi^2}{Qs^2}}$, à cause de $k=1$. Ainsi $Q\left(\frac{1}{AO}+\frac{Vs\sqrt{2}}{\alpha\pi}\sqrt{1-\frac{\alpha\pi^2}{Qs^2}}\right)$ exprime le plus grand accourcissement des fibres ; si donc on veut que le plus grand effort supporté par les fibres, sur l'unité superficielle, n'excède pas la limite B', il faudra que la valeur de Q ne surpasse point celle qui satisfait à l'équation

$$Q\left(\frac{1}{O}+\frac{AVs\sqrt{2}}{\alpha\pi}\sqrt{1-\frac{\alpha\pi^2}{Qs^2}}\right) = B' \ldots\ldots\ldots (1)$$

dans laquelle on attribuera à B' les valeurs indiquées dans les trois numéros précédents, pour les divers matériaux.

Lorsque la section transversale du solide sera rectangulaire, on aura $\alpha = A\frac{ab^3}{12}$, $O = ab$, $V = \frac{b}{2}$ et l'équation deviendra

$$\frac{Q}{ab}\left(1+\frac{12.s}{\pi b\sqrt{2}}\sqrt{1-A\frac{\pi^2 ab^3}{12Qs^2}}\right) = B' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Cas où il est chargé parallèlement ou obliquement à la longueur.

(*)

144). Les mêmes considérations s'appliquent aux cas de résistance à la flexion, traités (N.os 89, 90, 99 et 100).

Dans le premier cas, on a $\frac{Q}{AO}$ pour la compression des fibres, due à l'action du poids Q et $\frac{VQg}{\alpha\cos c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}}$ pour la plus grande compression provenant

de la courbure du solide ; d'où résulte

$$Q\left(\frac{1}{O}+\frac{AVg}{2\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\alpha}}}\right)=B \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

et

$$\frac{Q}{ab^2}\left(b+\frac{6g}{\cos c\sqrt{\frac{12Q}{Aab^3}}}\right)=B' \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

quand la section est un rectangle.

(*) Dans le second cas, $\frac{Q}{AO}$ est l'extension commune à toutes les fibres et $\frac{VQg}{\alpha}$, la plus grande extension due à la courbure ; d'où

$$Q\left(\frac{1}{O}+\frac{AVg}{\alpha}\right)=B' \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

et

$$Q\,\frac{b+6g}{ab^2}=B' \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

quand la section du solide est rectangulaire.

Dans le troisième cas, $\frac{Q\cos\varepsilon}{AO}$ sera l'accourcissement des fibres, provenant de l'action de la composante $Q\cos\varepsilon$, parallèle à l'axe du solide, et $\frac{VQ\sin\varepsilon\tan c\sqrt{\frac{Q\cos\varepsilon}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha Q\cos\varepsilon}}$ le plus grand accourcissement produit par la flexion ; de là

$$Q\left(\frac{\cos\varepsilon}{O}+\frac{AV\sin\varepsilon\,\mathrm{tang.}\,c\sqrt{\frac{Q\cos\varepsilon}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha Q\cos\varepsilon}}\right)=B' \quad \ldots\ldots (5)$$

et

$$\frac{Q}{ab^2}\left(b+\frac{6\sin\varepsilon\,\mathrm{tang.}\,c\sqrt{\frac{12Q\cos\varepsilon}{Aab^3}}}{\sqrt{\frac{12Q\cos\varepsilon}{Aab^3}}}\right)=B' \quad \ldots\ldots (6)$$

(*) Enfin dans le quatrième cas, les fibres sont d'abord allongées également par la composante parallèle à l'axe du solide et l'extension des fibres situées à la surface convexe augmente ensuite par l'effet de la courbure. On obtiendra toujours de la même manière l'équation qui détermine la limite cherchée et que nous nous dispenserons d'écrire, parce qu'elle est un peu compliquée.

Cas des solides courbes ; 1° dont la figure est celle d'équilibre ;

145). Quant aux solides courbes, si la figure est celle qui convient à l'équilibre, le solide est simplement pressé suivant sa longueur et les dimensions de la section transversale étant généralement petites en comparaison de la longueur, on peut supposer la pression répartie également sur toute l'étendue de cette section. Ainsi T représentant la plus grande valeur de la pression, calculée par les formules des N.os 110 et suivants, on aura l'équation

$$\frac{T}{O}=B' \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

laquelle servira à établir le rapport convenable entre les dimensions du solide et la charge qui produit la pression.

2° dont la figure n'est pas celle d'équilibre.

146). Si la figure du solide n'est pas celle qui convient à l'équilibre et que ce solide fléchisse par l'action des poids dont il est chargé, on obtiendra encore la limite de ces poids par les considérations déjà employées. D'abord, à raison de la pression T, dont les valeurs ont été indiquées (N.os 117 et suiv.ts), les fibres sont comprimées, dans toute l'étendue de la section, d'une partie $\frac{T}{AO}$ de leur longueur. Ensuite, par l'effet de la flexion, les fibres extrêmes

sont comprimées d'une autre partie $V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ de leur longueur (N.º 116); par conséquent, on aura l'équation

$$\frac{T}{O}+AV\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (?)$$

qui fera connaître la limite cherchée.

Remarques sur l'application des formules propres à ce cas — exemples.

147). On remarquera que la valeur de l'expression $V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$, qui est l'une des quantités $\frac{V}{\varepsilon}[X(b-y)+Y(a-x)]$, $\frac{V}{\varepsilon}\int_x^a p(u-x)\,du$, ou leur somme, se trouvera positive ou négative, selon que, dans le point auquel cette valeur répond, la flexion aura augmenté ou diminué l'angle entre la normale de la courbe et l'axe des y; mais qu'ici on ne doit pas avoir égard au signe de cette valeur et que c'est seulement la valeur absolue qu'il faut ajouter à celle de $\frac{T}{AO}$: sur quoi l'on se rappellera que T a été supposé positif, quand il représente une pression; en sorte que cette valeur se trouvant négative, indiquera que le solide est étendu et non comprimé. Si la section transversale du solide, n'est pas susceptible de se partager en deux parties symétriques, par un axe perpendiculaire au plan de la flexion, V doit représenter la distance à l'axe d'équilibre (déterminé par la formule (a.) du N.º 43) de la fibre qui est le plus comprimée, lorsque T est positif, et de la fibre qui est le plus étendue, lorsque T est négatif. Enfin la somme des valeurs absolues des quantités $\frac{T}{AO}$ et $V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ sera donnée en fonction de l'abscisse x, et il est clair que l'on devra attribuer à x, dans cette fonction, la valeur qui la rendra la plus grande possible, dans toute l'étendue de la courbe.

Reprenons, par exemple, le solide considéré (N.º 118); la valeur de T étant positive dans toute l'étendue de la courbe, le solide est partout comprimé suivant sa longueur. Que dans la formule (j) du N.º 116, on remplace Y par −R et X par sa valeur donnée (N.º 118), on verra que la valeur de $V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ est d'abord négative, qu'elle devient ensuite positive et se réduit à zéro, quand $x=a$. On ajoutera cette valeur, sans avoir égard à son signe, à celle de $\frac{T}{AO}$ et réglant les valeurs de V et O conformément à la remarque précédente, on déterminera R par la condition que, pour toutes les valeurs de x comprises entre o et a, la somme $\frac{T}{AO}+V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$, ne surpasse point $\frac{B'}{A}$.

Le solide considéré (N.º 119) et chargé seulement du poids $2pa$, se rapporte au cas du N.º 145; et si, en outre, il supporte le poids 2R, on devra se servir de la valeur de T indiquée dans ce N.º 119. Mais comme ce poids 2R produit seul la flexion du solide, la valeur de $V\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ sera la même que ci-dessus et devra être employée de la même manière.

Observation générale.

148). La théorie de la résistance des solides, que nous venons d'exposer, ne diffère guères que par l'ordre didactique, de celle qui est renfermée dans le livre de M.r Navier que nous nous sommes plus à prendre pour guide et pour modèle. L'ordre que nous avons choisi nous a paru propre à abréger le développement de la théorie, sans la restreindre ni l'obscurcir.

Au reste, cette théorie ne faisait point partie de notre premier travail sur la stabilité des constructions.

Stabilité des Voûtes (*).

Préliminaire.

Des premières recherches des Géomètres sur l'équilibre des Voûtes.

1. Les premières recherches des Géomètres sur la stabilité des voûtes ont eu pour objet la figure qui convient à l'équilibre particulier de chaque voussoir. D'abord en fesant abstraction tant du frottement que de la cohésion et en supposant la voûte d'une épaisseur constante, mais infiniment petite; ils ont trouvé que si les élémens ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur, la figure est celle de la chaînette ou de la courbe que forme une chaîne pesante et parfaitement flexible, suspendue par ses extrémités à deux points fixes; et qu'en général, quelles que fussent les puissances appliquées aux élémens, la figure est celle de la courbe funiculaire, c'est-à-dire, de la courbe suivant laquelle se plierait une corde souple et inextensible, sollicitée par ces mêmes puissances; ce qu'on pouvait facilement prévoir, en observant que l'équilibre d'un système n'en subsiste pas moins, lorsque toutes les forces viennent à agir en sens directement contraires. Pour se rapprocher de l'état réel des choses, ils ont ensuite attribué à la voûte une épaisseur finie (Bossut, Académie, 1774–76) et ont cherché les relations entre les forces appliquées aux voussoirs, la courbe d'intrados et la longueur du joint à un point quelconque; il en résulte que la loi des forces et l'une des courbes étant données, l'autre courbe ou la longueur du joint est déterminée, avec cette particularité que si les voussoirs n'étant soumis qu'à la seule action de la pesanteur, la tangente à la naissance de l'intrados est verticale, la longueur du joint y devient infinie. Mr. de Prony a fait voir (Architecture hydraulique, 1re partie, page 161) comment en introduisant dans les conditions d'équilibre l'hypothèse du frottement sur les joints, l'infini disparaît de l'expression de la longueur des voussoirs. La plupart de ces recherches ont été recueillies par Mr. Bérard, dans l'ouvrage qu'il a publié, en 1810, sur la statique des voûtes.

figure 1.re

figure 2.e

(*) Cette Statique des voûtes, déjà lithographiée en 1825, pour l'usage de l'Ecole, a été faite sans la connaissance de l'ouvrage de Mr. Navier, intitulé: Application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, dont le premier volume, renfermant une théorie des voûtes, n'a paru que sur la fin de 1826.

Elles étaient purement spéculatives.

2. Les formules analytiques, déjà d'un ordre élevé, auxquelles on arrive par la considération de l'équilibre partiel, ne peuvent être d'un grand secours à la pratique, quand même on y tiendrait compte des circonstances physiques; parce que les formes de voûtes, qui en dérivent, ou sont inexécutables ou s'éloignent trop de celles dont on fait usage et qui sont subordonnées soit à des conditions locales soit à la facilité de la construction ou à d'autres convenances particulières.

Véritable manière d'envisager la question; solution de Lahire.

3. C'est pourquoi les Géomètres ont envisagé la question sous un autre point de vue, indiqué d'ailleurs par l'observation: ne s'astreignant plus à l'équilibre partiel, ils ont considéré comme un seul corps continu, plusieurs voussoirs consécutifs qui fussent stables entre eux le fussent-ils inégalement, ce qui est tout-à-fait légitime; et parce que, suivant l'observation, une voûte dont les pieds-droits sont trop faibles pour en soutenir la poussée, se fend vers les reins, ils ont regardé la partie supérieure comme un coin qui tend à écarter ou à renverser les parties inférieures et les pieds-droits dont ils obtenaient en conséquence les dimensions convenables à l'équilibre par la théorie du coin et celle du levier. Cette solution due à Lahire qui l'a exposée, en 1712, dans les mémoires de l'Académie, était d'une simplicité séduisante; aussi a-t-elle été généralement admise jusqu'à ces derniers temps par ceux qui se sont occupés de la même matière et elle a servi de base aux applications qu'ils ont faites des principes de la mécanique aux différentes questions concernant les voûtes.

Défauts de cette solution.

4. Néanmoins, la solution de Lahire porte sur deux hypothèses également gratuites; d'abord il n'est pas vrai en général que le plus faible d'une voûte se trouve au milieu des reins; la position des joints de rupture dépend tant de la forme que des dimensions de la voûte et varie avec ces élémens. Ensuite la partie supérieure n'agit que rarement comme un coin pour renverser les parties latérales; le frottement (sans parler de la cohésion) modifie l'action des voussoirs et peut suffire pour les empêcher de glisser les uns sur les autres.

Principes de la méthode de Coulomb; avantages et perfectibilité de cette méthode.

5. Dans un mémoire sur quelques problèmes relatifs à l'architecture (tome VII des ouvrages présentés à l'Académie), Coulomb s'étant proposé d'apprécier les suppositions de Lahire, a cherché par la considération des maximum et minimum les limites des

pressions horizontales que peut soutenir, à la clef, sans se rompre, une voûte dont les dimensions sont données et dont les voussoirs sont retenus par la cohésion et le frottement. Cet habile Ingénieur suppose la demi-voûte divisée en deux parties par un joint quelconque, dont il détermine la position par la condition que la force appliquée à la clef et nécessaire pour empêcher la partie supérieure soit de descendre le long de ce joint, soit de tourner autour de son intrados, ait la plus grande valeur possible; ce qui donne deux maximum dont le plus grand est la limite inférieure cherchée. Déterminant ensuite la position du joint hypothétique, par la condition que la force appliquée à la clef et capable soit de faire monter la partie supérieure, le long de ce joint, soit de la faire tourner autour de l'extrados, ait la moindre valeur possible, il obtient deux minimum dont le plus petit est la limite supérieure demandée. La première limite constitue en même temps la poussée effective de la voûte, tandis que le joint qui y répond est celui de rupture et il est évident que la voûte ne pourra subsister si cette première limite ne se trouve pas moindre que la seconde. Cette méthode très-ingénieuse et dirigée vers l'utilité pratique a l'avantage non seulement de bannir l'arbitraire tant de la position du joint de rupture, que du mode d'action des voussoirs, par conséquent de la valeur de la poussée; mais encore de conduire à une théorie aussi simple que lumineuse, qui n'a besoin pour devenir tout-à-fait rigoureuse, que d'une légère modification dans l'un de ses principes et qui s'accorde avec les phénomènes réels, pourvu que l'on considère les différentes positions que peut avoir la force appliquée à la clef. Coulomb n'a pas développé sa méthode; il s'est borné à quelques indications vagues qui la laissent imparfaite, et même, à en juger par la remarque I du § XVIII de son mémoire, il paraît que les premières épreuves sur la rupture des voûtes, épreuves rapportées dans la coupe des pierres de Frézier, l'auraient induit à se désister de la généralité dans laquelle il avait d'abord conçu cette méthode.

figure 3.

6. Enfin les observations faites sur les grands ponts construits vers la fin du siècle dernier, et des expériences directes sur la rupture des voûtes, ont constaté que, généralement parlant, les voussoirs d'une voûte ne se comportent pas comme des coins dont les actions réciproques se contre-balancent; mais que la voûte se partage effectivement en plusieurs parties continues qui agissent

Elle comprend les nouvelles théories fondées sur l'expérience et en décèle l'imperfection.

les unes sur les autres par des points d'appui, de la même manière que des leviers inflexibles et pesans, assemblés à charnières; fait incontestable qui a été pris immédiatement pour base de théories que leurs auteurs présentent comme originales, la plupart sans citer Coulomb dont la méthode renferme ce fait fondamental et à qui appartient le principe essentiel, relatif à la détermination du joint de rupture.

Ces théories se fondent principalement sur les expériences de Mr. Boistard, où les voûtes avaient constamment une épaisseur de $\frac{1}{24}$ de l'ouverture qui était de 8m: elles supposent, en conséquence, que des deux joints, savoir, celui de rupture, c'est-à-dire, de la plus grande poussée et celui autour de l'extrados duquel cette poussée tend à faire tourner la partie supérieure, l'un ou l'autre se trouve toujours placé à la base de la voûte, ce qui n'est pas exact; de sorte que ces théories peuvent donner pour stables des voûtes sujettes à se rompre et doivent, au moins sous ce rapport, être regardées comme défectueuses.

L'objet qu'on se propose en le développement et l'application de cette méthode.

7. Il faut donc en revenir à la méthode de Coulomb, mais lui conserver sa généralité primitive et sur-tout considérer les différentes positions de la force appliquée à la clef, afin de ne laisser échapper aucun cas de rupture des voûtes et d'obtenir les conditions exactes et complettes de leur stabilité.

Nous tâcherons d'établir la théorie des voûtes à priori ou indépendamment de l'expérience qui ne saurait embrasser tous les cas, et par là d'affranchir du reproche d'incertitude et d'empirisme, cette partie essentielle de la science des constructions. Viendront ensuite les applications de la théorie aux principales formes de voûtes en usage.

Pour plus de facilité nous imaginerons avec Coulomb un joint vertical, passant par le sommet de la voûte et qui la divise en deux parties égales. Cette hypothèse qui simplifie la question ne nuira nullement à l'exactitude.

Exposition de la théorie.

Recherche des limites de la force qui peut être appliquée à la clef d'une demi-voûte, sans qu'il y ait rupture.

figure 4.

8. Afin d'aller du simple au composé, nous ne considérerons d'abord qu'une moitié de voûte.

Soit donc $a\,c'c\,d$ le profil droit d'une demi-voûte en berceau; on suppose que les courbes $a\,c'$, $c\,d$ de douelle et d'extrados sont données et que les joints tels que $m\,n$ sont normaux à la première courbe;

on fait abstraction de la longueur de la voûte, ou l'on suppose cette longueur égale à l'unité linéaire: il s'agit d'assigner les limites de la force qui appliquée perpendiculairement au joint vertical cc', en un point donné h, pourra maintenir la demi-voûte en repos, eu égard au frottement et à la cohésion des joints.

Regardons les deux parties $mncc'$, $mnda$ séparées par le joint mn, chacune comme un seul corps et celle-ci comme inébranlable sur sa base ad. Désignons par z la grandeur du joint mn, par α l'angle qu'il fait avec la verticale, par p le poids de la partie supérieure $mncc'$, par θ l'angle du frottement, par γ la cohésion sur l'unité de surface et par φ la force horizontale appliquée en h.

Deux conditions sont nécessaires au repos absolu du système; l'une qu'il n'y ait glissement sur aucun joint ni dans le sens nm ni dans le sens mn; l'autre qu'il n'y ait rotation, pour aucun joint, ni autour du point m ni autour du point n.

1° Expressions de la force pour le cas du glissement; limites de sa valeur.

9. 1° Par rapport au glissement il est facile de voir que l'équation d'équilibre sera,

$$\varphi \sin\alpha = p\cos\alpha \mp (p\sin\alpha + \varphi\cos\alpha)\tang\theta \mp \gamma z, \quad \ldots\ldots (1)$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu, selon que le corps $mncc'$ est près de glisser dans le sens nm ou dans le sens contraire mn. Cette équation donne, pour le premier cas,

$$\varphi = \frac{p\cos(\alpha+\theta) - \gamma z\cos\theta}{\sin(\alpha+\theta)} \quad \ldots\ldots (2)$$

et pour le second,

$$\varphi = \frac{p\cos(\alpha-\theta) + \gamma z\cos\theta}{\sin(\alpha-\theta)} \quad \ldots\ldots (3)$$

or, puisque par la construction même, il existe dans la voûte une suite de joints et que la partie supérieure peut glisser sur chacun d'eux, il s'ensuit que pour obtenir les limites demandées, il faut considérer, dans le premier cas, le joint auquel répond la plus grande valeur de φ et dans le second cas, le joint qui se rapporte à la plus petite valeur de cette indéterminée; c'est-à-dire, que ces limites ne sont autre chose que le maximum G et le minimum g que comportent respectivement les expressions (2) et (3), envisagées ainsi que p comme des fonctions de α, et il est clair que la voûte ne glissera sur aucun joint, ni dans un sens ni dans l'autre, si φ n'est pas moindre que G et ne surpasse point g.

2° Expressions de la force pour le cas de la rotation; limites de sa valeur.

10. 2° Quant au mouvement de rotation, en désignant par x la distance horizontale mp ou nq du centre de gravité g de mn cc' au point m ou n et par y la distance verticale pr ou qr de la direction de φ aux mêmes points; comme le moment de la cohésion du joint par rapport à ces points, est également $\frac{1}{2}\gamma z^2$, on trouve sans difficulté que l'équation d'équilibre donne relativement au point m,

$$\varphi = \frac{px - \frac{1}{2}\gamma z^2}{y} \quad \ldots . (4)$$

et relativement au point n,

$$\varphi = \frac{px + \frac{1}{2}\gamma z^2}{y} \quad \ldots . (5)$$

expressions dans lesquelles les variables p, x, y et z sont des fonctions données de l'angle α. Soit F le maximum de la première et f le minimum de la seconde; il est évident que, pour aucun point, la voûte ne tournera autour de l'un ou l'autre point m, n, pourvu que φ ne soit pas au-dessous de F ni au-dessus de f.

Cas d'impossibilité de l'équilibre, limites absolues dans le cas contraire.

11. Il suit de là 1° que l'équilibre sera impossible non seulement si l'on n'a pas $G < g$ et $F < f$, mais encore $G < f$ et $F < g$, afin qu'une même grandeur puisse être comprise en même temps entre G, g et entre F, f; ou, en un mot, l'équilibre sera impossible, si la plus grande L des deux limites relatives G, F excède la plus petite l des deux g, f; 2° que, dans le cas contraire, les limites absolues de la force qu'on pourrait appliquer en k, sans rompre la voûte, sont ces quantités L et l, satisfaisant à la condition $L < l$.

Expressions particulières de la force, quand la cohésion est négligée.

12. Lorsque pour favoriser la stabilité on néglige la cohésion, laquelle est réellement nulle dans les voûtes récemment construites, les expressions (2) et (3) se réduisent à

$$\varphi = \frac{p}{\tan g(\alpha \pm \theta)} \quad \ldots . (a),$$

et les expressions (4) et (5) à

$$\varphi = \frac{px}{y} \quad \ldots . (b),$$

Nous désignerons encore par G, g, F, f les limites données par ces expressions réduites. On se souviendra que les signes + et − de l'expression (a) répondent au glissement dans les sens nm et mn respectivement, et que les variables x et y qui entrent dans l'expression (b) se rapportent au point m pour la limite F et au point n pour la limite f.

Remarque sur la position de la force appliquée à la clef.

13. Il est à remarquer que ni les deux positions du joint m n, auxquelles répondent le maximum Φ et le minimum φ de la force φ, ni les valeurs absolues de ces limites ne dépendent de la position du point d'application h, sur le joint vertical cc'; mais qu'il en est autrement des deux positions de ce joint, relatives aux limites F, f: ces positions, les valeurs respectives des limites et leur relation de grandeur dépendent de la position du point h sur cc'. Nous assignerons plus loin la position du point h, ce qui définira la variable y, renfermée dans la formule (b).

Le glissement vers l'extrados n'est possible que sur les joints des naissances;

14. Nommons α' l'angle du joint m n avec l'horizon, il viendra $\alpha = 90° - \alpha'$ et l'équation (a) considérée avec le signe − prendra la forme

$$\varphi = p \tan g (\alpha' + \theta).$$

Cela posé, on voit d'abord que si $\alpha' = 0$, ou si le joint m n prend la position horizontale, p devient le poids de toute la demi-voûte; on voit ensuite que si à partir de là, α' augmente, p diminue, tandis que $\tan g(\alpha' + \theta)$ croît, jusqu'à ce que $\alpha' = 90° - \theta$: à ce terme, φ est infini de même que $\tan g(\alpha' + \theta)$; au-delà, ces quantités deviennent négatives. Ainsi dans l'intervalle de $\alpha' = 0$ à $\alpha' = 90° - \theta$, le facteur $\tan g(\alpha' + \theta)$ croît rapidement et à la fin devient infini; tandis que par la forme même qu'on a coutume de donner aux voûtes le facteur p ne décroît que lentement et ne devient nul que quand $\alpha' = 90°$; par conséquent φ n'admet, en général, qu'un minimum relatif qui répond à la moindre valeur de α'.

D'un autre côté, il est clair que de tous les joints existans dans la hauteur du pied-droit, c'est celui de la naissance, qui se trouve le moins chargé et où par conséquent le frottement oppose la moindre résistance au glissement.

Mesure de la force capable d'opérer ce mouvement.

15. Il suit de là que si la voûte est susceptible de céder en glissant dans le sens m n, la séparation doit se faire aux joints mêmes des naissances et que dans le cas où ces joints sont horizontaux, la moindre pression à la clef, qui soit capable d'opérer le glissement, a pour mesure le produit du poids de la demi-voûte par la tangente de l'angle du frottement. On pourra donc dans ce cas se dispenser d'employer le signe − dans la formule (a).

Application de ces généralités à une voûte complette, abandonnée à elle-même. figure 5.

16. Pour passer de ces considérations abstraites à l'état réel des choses, représentons-nous une voûte cylindrique, complette, a c b, de forme quelconque, divisée au sommet par le joint vertical cc', en deux

parties égales c a, c b, qui ne se touchent que par un seul point h de ce joint, et de chaque côté du sommet, par les joints I, i ; J, j aux-quels répondent respectivement les limites G ; g ; F, f de la force φ qu'on pourrait appliquer au point h, sans rompre l'une ou l'autre demi-voûte prise isolément. Supposons pour un moment la voûte échancrée au-dessus et au-dessous du point h, de manière à permettre la rotation des deux parties supérieures autour de ce point, dans un sens ou dans l'autre ; imaginons que le système soit tout à coup abandonné à lui-même, et faisons d'abord abstraction du glissement, en sorte que nous n'ayons à considérer que les joints J, j et les limites relatives F, f. Il se présente deux cas à distinguer, selon que F n'excédera pas ou excédera f.

Dans le premier cas il y aura stabilité si F est moindre que f, ou simple équilibre si F est égal à f et il est clair 1° que la force horizontale F, en tant que la plus grande qu'il faille appliquer au point h, pour empêcher la partie supérieure à un joint de tourner autour de l'intrados de ce joint, constitue la pression qui se produira réellement au point h, par l'action mutuelle des deux demi-voûtes et que le joint J relatif à F est celui de la plus grande pression en ce même point h ; 2° que les parties h n m, supérieures aux deux joints J sont retenues sur les inférieures m n' m', par la pression même F qu'elles exercent réciproquement l'une contre l'autre au point h ; 3° que cette pression F tend à renverser non seulement la partie h m' n' supérieure au joint j, par un mouvement de rotation autour de l'extrados de ce joint, mais encore toute la demi-voûte c e, par un semblable mouvement autour de l'arête extérieure f de sa base. Tout cela se comprendra facilement, si l'on imagine au lieu des parties h m, m n', n' e, les leviers h m, m n', n' f assemblés à charnières et chargés des poids de ces parties.

Dans le second cas, la pression effective qui se ~~produira~~ au point h, sera évidemment mesurée par la force f, laquelle suffit à l'équilibre, et comme cette pression tend à s'accroître, puisqu'elle a virtuellement pour limite F qui, par hypothèse, surpasse f, il s'ensuit que la voûte ne pourra se soutenir d'elle-même et se rompra. Quant au mode de rupture, il dépendra de la position respective des deux joints J, j, dont l'un J doit s'ouvrir à l'extrados par l'effet de la rotation de la partie supérieure autour de son intrados, tandis que c'est le contraire pour l'autre j : selon que le premier

se trouvera au-dessus ou au-dessous du second; la rupture s'opèrera de manière que les deux points m (fig. 5) s'écartant, ou les deux points n' (fig. 6) se rapprochant, le point h s'abaissera ou s'élèvera le long de la verticale oc, d'où il ne saurait sortir.

fig. 6e

Il n'existe, quant à la rotation, que deux modes possibles de rupture.

17. On conçoit donc que quand le joint vertical aura toute son étendue cc'; 1° le point h, c'est-à-dire, le point d'arcboutement des deux demi-voûtes ne sera susceptible que des deux positions extrêmes c et c', puisque autrement la rotation autour du point d'arcboutement serait impossible; 2° il existe entre la position absolue de ce point et la position respective des joints J, j, une subordination nécessaire, en conséquence de laquelle les états d'équilibre ou les modes de rupture se réduisent à deux: conservons les notations F, f; J, j des limites et des points relatifs pour la position c et désignons semblablement par F', f', J', j' les limites et les joints correspondants, pour la position c'; le joint j devra se trouver au-dessous du joint J, quand il s'agira de la position c et au contraire, le joint j' devra se trouver au-dessus du joint J' quand il s'agira de la position c', toute autre disposition des joints répugnant à la rupture de la voûte, à moins toutefois que le joint j ou j' ne puisse être suppléé par un joint analogue placé au-dessous de J ou au-dessus de J'.

figure 7.

figure 8.

Manière d'avoir égard au glissement; cette circonstance physique donne lieu à trois nouveaux modes de rupture.

18. Lorsqu'on admettra le glissement des voussoirs les uns sur les autres, on devra faire entrer les forces G, g relatives à cette circonstance physique, en comparaison avec les forces F, F', f, f' et les regarder comme appliquées aux mêmes points que celles avec lesquelles on les comparera. Il est d'ailleurs évident que l'introduction du glissement donnera lieu à trois nouveaux modes de rupture; savoir 1° par glissement sur le joint i et simultanément par rotation autour de l'intrados de J; mais non de J', parce que les deux demi-voûtes ne peuvent s'arc-bouter qu'en c; 2° par glissement simultané sur les joints I, i; 3° par glissement sur le joint I et en même temps par rotation autour de l'extrados du joint j ou j' ou au moins de quelque joint analogue.

Deux de ces derniers servent de base à la théorie de Lahire.

19. C'est sur ces deux derniers modes de rupture exclusivement que Lahire a fondé sa théorie des voûtes, mais en prenant arbitrairement les joints qui s'y rapportent et considérant au lieu de la force G, les composantes suivant la perpendiculaire à l'extrémité inférieure du joint I, tant de cette force que du poids du demi-coin compris entre le joint I et le joint vertical cc'.

De la position respective des joints auxquels répondent les limites pour la rotation et de

20. La position respective des deux joints J, J' ou j, j' est généralement déterminée; en effet, la force F ramenée au bras de levier

la grandeur relative de ces limites, de la force F' sera nécessairement moindre qu'elle et réciproquement; c'est-
figure 9. à-dire, qu'on a

$$F\frac{bc}{bc'} < F', \qquad F'\frac{b'c'}{b'c} < F,$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre

$$bc.\,b'c' < bc'.\,b'c\,;$$

or, $bc = cc' + bc'$ et $b'c = cc' + b'c'$, ce qui donne

$$b'c' < b'c\,;$$

le joint J' est donc toujours au-dessus du joint J.

On démontrera semblablement qu'au contraire le joint j' est toujours au-dessous du joint j.

Mais il n'en est pas de même soit de la grandeur relative des deux limites F, F' ou f, f', soit de la position respective des deux joints J, j ou J', j': elles dépendent de la forme particulière de la voûte et des autres circonstances.

De la poussée de la voûte et du joint qui y répond dans le cas de la stabilité.

21. Lorsque la voûte se soutient d'elle-même et se trouve à l'état de stabilité, la pression réellement exercée au joint vertical cc' et dans laquelle consiste la plus grande poussée ou la poussée effective de la voûte, se concentre en un point qui est en général intermédiaire à c et c' et le joint qui y répond est compris entre J et J'. On pourrait prendre pour cette pression la moyenne entre les limites F, F' et la regarder comme appliquée au milieu de cc'; mais parce qu'on ignore suivant quelle loi elle est distribuée sur cc', et à cause de l'imperfec-tion inévitable dans l'exécution des joints, il vaudra mieux prendre la plus grande des deux limites F, F' et son propre point d'application; de sorte que le joint relatif J ou J' sera pour nous celui de la plus grande poussée ou de la poussée effective.

De leur détermination.

22. Ainsi, pour avoir la valeur de la poussée et la position du joint qui y répond, on supposera la force φ appliquée successivement en c et en c'; on cherchera les maximum respectifs F, F' de l'expres-sion (b) de cette force et l'on prendra le plus grand des deux pour la poussée effective de la voûte; la valeur relative de α déterminera en même temps le joint qui se rapporte à cette poussée.

Distinction entre le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée.

23. Ajoutons ce principe essentiel: pour le même point c ou c', il y a bien identité entre le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée, pris par rapport à l'arête soit extérieure soit intérieure de la base de la demi-voûte; car puisque le bras de levier de la force horizontale φ, appliquée à ce point,

est donné et constant, cette force devient un maximum en même temps que son moment; mais il n'en est plus de même quand on passe de l'un des points à l'autre; en effet, il est clair que le moment de la poussée relative au point c peut surpasser celui de la poussée relative au point c'; quoique la première force soit moindre que la seconde; ce qui donne lieu de distinguer entre le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée. Le dernier est évidemment celui auquel doit être comparée la résistance de la demi-voûte.

Conditions générales de la stabilité des voûtes.

24. Il ne sera pas difficile à présent d'établir les conditions générales de la stabilité et de l'équilibre des voûtes.

L et l désignant les limites absolues, par rapport au point c, c'est-à-dire, la plus grande et la plus petite des limites relatives G, F et g, f; soient pareillement L', l', les limites absolues, par rapport au point c', c'est-à-dire, la plus grande et la plus petite des limites G, F et g, f.

D'abord, la stabilité de la voûte sur son plan de naissance exige que la plus grande poussée relativement au point c, soit moindre que les forces g, f, nécessaires pour faire glisser le long du joint i ou pour faire tourner autour de l'extrados du joint j, en observant que quand ce dernier se trouvera au-dessus du joint J, et que F surpassera G ou sera la plus grande poussée, il suffira que F soit moindre que la plus petite force capable de faire tourner autour de l'extrados de tout joint inférieur au joint J. Même raisonnement à l'égard de la plus grande poussée relative au point c'.

En second lieu, pour la stabilité de la demi-voûte sur son pied-droit, il faut que le plus grand moment de poussée, par rapport à l'arête extérieure de la base du pied-droit, soit moindre que le moment du système par rapport à la même arête.

Si donc μ et M désignent ces moments, les conditions générales de la stabilité seront

$$L < l,\ L' < l',\ M > \mu;$$

sauf la restriction qui a lieu quand la position respective des deux joints J, j ou J', j' n'est pas compatible avec la rupture.

Ces trois conditions sont indépendantes, c'est-à-dire qu'elles peuvent exister séparément, de sorte que pour le repos absolu du système il faut qu'elles soient satisfaites toutes les trois à la fois.

Pour le joint de naissance, la troisième est comportée par les deux autres.

25. Au reste, il ne sera pas nécessaire d'appliquer la dernière au joint de naissance; car pour lors elle se trouve renfermée dans les deux premières. En effet, soit m le moment de la demi-voûte

par rapport à l'arête extérieure du joint de naissance et c, c' les hauteurs des points c, c' au-dessus de cette arête, pour laquelle $\frac{m}{c}$, $\frac{m}{c'}$ seront les forces analogues à f et f'; on aura nécessairement $\frac{m}{c} > f$, $\frac{m}{c'} > f'$, à moins qu'il n'y ait égalité, ce qui arriverait, si c'était le joint j ou j' lui-même qui fût celui de naissance. Or les conditions $L < l$, $L' < l'$ impliquent $L < f$, $L' < f'$; donc à plus forte raison, on a $L < \frac{m}{c}$, $L' < \frac{m}{c'}$, c'est-à-dire $m > n$.

Il y a plus, c'est que si m' représente le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête intérieure du joint de naissance; comme $\frac{m'}{c}$, $\frac{m'}{c'}$ seront, pour ce joint, les forces analogues à F et F', on aura $\frac{m'}{c} < F$, $\frac{m'}{c'} < F'$ et, à plus forte raison, $m' < cf$, $m' < c'f'$.

26. Pour abréger, nous exprimerons par la même lettre H les hauteurs des points c et c', au dessus de la base du pied-droit et nous regarderons aussi L et l comme susceptibles non seulement des valeurs que ces lettres désignent, mais encore des deux autres L', l', de manière que nous aurons simplement

$$L < l \ldots (c), M > HL \ldots (d),$$

la première condition étant réellement double,

Cas du simple équilibre.

Dans le cas du simple équilibre, les conditions seront évidemment, ou

$$L = l, \; L' < l',$$

ou

$$L' = l', \; L < l;$$

en observant que les deux inégalités sont sujettes à la restriction énoncée précédemment.

Résumé de la notation employée.

27. Comme il faudra avoir toujours présente la notation que nous avons employée, nous en ferons ici le résumé, en indiquant la correspondance des signes;

	(a)	(b)
formules générales		
limites relatives	G, g.	F, f, F', f',
joints correspondans	I, i,	J, j, J', j',
limites absolues	L, l,	et L', l'.

I est le joint de la plus grande poussée G provenant du glissement, i celui sur lequel le glissement de dedans en dehors serait déterminé par la plus petite force g; relativement au point c sommet de la voûte, J est le joint auquel répond la plus grande force F nécessaire pour empêcher la partie supérieure de tourner autour de son intrados, c'est-à-dire que J désigne le joint de la plus grande poussée au sommet

et F cette poussée; j est le joint auquel répond la moindre force f capable de faire tourner la partie supérieure autour de son extrados; J, F' et j', f' sont les analogues par rapport à l'intrados et du joint de la clef; L est la plus grande des deux forces G, F et L' des deux G, F'; tandis que l est la plus petite des deux g, f et l' des deux g, f'.

Raisons pour conserver à la théorie toute sa généralité.

28. Nous avons vu que le joint i, sur lequel la partie supérieure peut glisser en montant, coïncide, en général, avec celui de naissance; d'un autre côté, le joint I, sur lequel la partie supérieure peut glisser en descendant, se rapporte au cas où la partie moyenne de la voûte agirait comme un coin, et ce cas n'arrive pas ordinairement, à cause du frottement des matériaux, ainsi que Coulomb l'a dit expressément dans la remarque citée. On pourra donc communément mettre à l'écart le glissement sur les joints pour s'en tenir au seul mouvement de rotation. Mais la connaissance de la limite G n'en est pas moins utile; on conçoit en effet que l'intrados d'une voûte étant donné, l'épaisseur peut augmenter au point que la verticale menée par le centre de gravité de la partie supérieure au joint J ou J' passe très-près de l'intrados de ce joint; alors la limite F ou F' qui pourra être très-petite et même tout-à-fait nulle, ne représentera plus la pression réellement exercée à la clef; cette pression proviendra de la tendance des deux parties supérieures aux joints I, à descendre, comme un coin, en glissant le long de ces joints et répondra par conséquent à la limite G. De plus les joints de naissance d'une voûte ne sont pas toujours horizontaux: ils ne le sont jamais dans les voûtes en arc de cercle ou en plate-bande et cette circonstance exige la considération de la limite g. Enfin presque toujours une voûte est surchargée à l'extrados et souvent elle est exposée à des chocs violens, tels que ceux des bombes, ce qui est analogue à une surcharge. Ainsi, pour ce cas, mais sur-tout pour la discussion complette d'un genre donné de voûtes, la considération des différentes limites est indispensable; c'est pourquoi nous chercherons leurs expressions particulières dans chacune des espèces de voûtes, dont nous nous occuperons.

Circonstances que présente la rupture des voûtes et que l'expérience a fait connaître.

29. Depuis 1773, il a été fait beaucoup d'observations et d'expériences sur la rupture des voûtes (Perronet, mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts; Gauthey, traité de la construction des ponts, Boistard, mémoires extraits de la Bibliothèque des ponts et chaussées, par Mr. Lesage, 2e édition; Rondelet, art de bâtir; &c);

les expériences de Mr. Boistard, exécutées en grand, sur des voûtes en berceau, des principales formes usitées dans la pratique, mais sous la même épaisseur de $\frac{1}{24}$ de l'ouverture sont les plus remarquables de toutes; la rupture y a constamment présenté les circonstances suivantes: la force du frottement est telle que la voûte se rompt par un mouvement de rotation autour des arêtes communes aux parties qui se séparent et non par un glissement sur les surfaces par lesquelles ces parties se touchent; lorsque la voûte se trouve dans un état très-peu différent de celui d'équilibre, elle ne se brise généralement qu'en cinq endroits, savoir: le joint de la clef, deux joints placés de part et d'autre de la clef, entre elle et les naissances, et les joints des naissances ou des bases des pieds-droits, si ceux-ci existent; enfin, on observe cette alternative, ou la partie supérieure s'abaisse et les parties inférieures s'écartent par en haut; alors le joint de la clef et ceux des naissances s'ouvrent à l'intrados, tandis que les joints intermédiaires s'ouvrent à l'extrados; ou bien la partie supérieure se soulève et les parties inférieures se rapprochent; pour lors l'ouverture des joints se fait précisément en sens inverse.

Comparaison de la méthode exposée, avec l'expérience.

30. Ainsi les modes de rupture sont réellement tels que nous les avons établis à priori, et dans les voûtes en berceau des formes communément usitées, le frottement des matériaux dont elles sont construites, est effectivement capable de s'opposer au glissement sur les joints. Il est vrai que ces expériences placent le joint de rupture j ou J à la naissance, mais il faut observer qu'elles ne concernaient que des voûtes dont l'épaisseur était constante et égale à $\frac{1}{24}$ de l'ouverture.

Application des principes précédents aux principales questions concernant la statique des voûtes.

31. Les principes exposés précédemment renferment la solution des questions relatives à la statique des voûtes et qui vont nous occuper. Nous envisagerons ces questions d'une manière générale, en nous bornant aux plus importantes. Nous terminerons cette théorie par quelques autres questions non moins utiles, dépendantes des mêmes principes. Ces généralités seront ensuite éclaircies par des applications aux différens genres de voûtes, employés dans la pratique.

La figure et les dimensions générales d'une voûte résultent de la destination de l'édifice dont cette voûte fait partie: l'ouverture, la montée, le cintre de la voûte, l'épaisseur au sommet, la hauteur des pieds-droits, la grandeur et la distribution de la charge que la voûte doit porter, sont autant d'élémens donnés.

1re Question.

Une voûte étant donnée déterminer les joints relatifs aux limites et les valeurs de ces limites.

32. Une voûte étant donnée, déterminer les joints relatifs aux limites et les valeurs de ces limites.

Ce sont donc les positions des joints I, i, J, j et J', j', ainsi que les valeurs des limites respectives G, g, F, f et F', f' qu'on demande, lesquelles se déterminent par le moyen des formules (a) et (b). Il faut se rappeler 1° que la formule (a) selon qu'elle est prise avec le signe + ou −, se rapporte au glissement dans le sens n m ou m n et donne respectivement le maximum G et le minimum g; 2° que la formule (b) comprend quatre cas, selon que la force φ est appliquée en c ou c' et qu'il s'agit de la rotation autour de m ou n, en sorte que p désignant le poids de la partie supérieure m n c c' et x, y les bras de levier de p et de φ par rapport à m et n, le maximum F et le minimum f répondent aux combinaisons m c et n c, tandis que le maximum F' et le minimum f' répondent aux combinaisons m c' et n c'.

Or, comme la voûte est donnée, les quantités p, x, y, qu'il s'agisse soit du point c ou du point c', soit du point m ou du point n pourront être exprimées en fonctions de α. Cela fait, on substituera dans les formules, les expressions trouvées, on égalera à zéro la différentielle de chaque résultat et tirant de l'équation ainsi obtenue, la valeur de l'inconnue α, on aura l'un des points cherchés.

Cette valeur reportée dans la formule fera connaître la limite relative à ce joint.

Observations sur la résolution de cette question.

33. La résolution de cette question donne lieu à plusieurs observations; 1° on ne sera pas obligé à tout ce calcul pour le second cas de la formule (a), puisqu'on sait que le joint i est en général celui de naissance. il suffira de substituer dans la formule, à la place de α, l'angle d'inclinaison du joint et même, si ce joint est horizontal et que q désigne le poids de la demi-voûte, il viendra tout de suite . . . $g = q \tang 0$; 2° la forme de l'expression de φ étant en général $\frac{P}{Q}$, celle de l'équation de condition du maximum ou du minimum sera $Q\,dP - P\,dQ = 0$; d'où l'on déduit $\frac{dP}{dQ} = \frac{P}{Q}$. Ainsi l'on obtiendra également la limite cherchée par la substitution de la valeur de l'inconnue α, soit dans l'une soit dans l'autre fraction et l'on préfèrera celle des deux qui sera la plus simple. De plus, comme

l'équation de condition est transcendante, puisque l'arc qui mesure l'angle α y est mêlé avec ses lignes trigonométriques, il faudra, pour la résoudre, recourir à la méthode des fausses positions; et si elle se trouvait absurde, alors il n'y aurait que maximum ou minimum relatif; 3.° enfin, au lieu de chercher directement les maximum et minimum, on pourra opérer par tâtonnement, en supposant successivement à l'inconnue α, différentes valeurs prises de part et d'autre de la moyenne entre les deux extrêmes 0 et $\frac{\pi}{2}$, et calculant les valeurs de φ correspondantes à celles qu'on aura attribuées à α; sur quoi l'on remarquera qu'il suffit d'avoir la valeur de l'angle α, en nombre entier, parce que, par la propriété des maximum et minimum, la valeur respective de φ n'éprouvera que très-peu de variation sur un assez grand développement du centre de la voûte. C'est ce procédé qu'il faudra suivre lorsque l'équation de condition se trouvera trop compliquée. D'ailleurs, comme cette équation est généralement satisfaite par plusieurs valeurs de α, ou qu'il existe en même temps plusieurs maximum et minimum, le procédé dont il s'agit, fera de lui-même distinguer les uns des autres, ainsi que le plus grand des maximum et le plus petit des minimum, soit absolus soit relatifs, ce qui pourra quelquefois en compenser la longueur.

2.e Question.

Vérifier si une voûte proposée se soutiendra d'elle-même.

34. *Vérifier si une voûte proposée se soutiendra ou non d'elle-même.*

On déterminera les joints relatifs aux limites G, g, F, f, et F', f' et les valeurs de ces limites, comme il a été expliqué dans la question précédente; d'où l'on conclura les valeurs des limites absolues L, l et L', l' que l'on pourra dès-lors comparer entre elles.

Cela posé, en prenant (N.° 24) au lieu de f et de f' les moindres forces nécessaires pour faire tourner autour de l'extrados de tout joint inférieur à J ou supérieur à J', lorsque F ou F' surpasse G et que le joint J se trouve au-dessous de j, ou J' au-dessus de j'; on sera certain, si la double condition $L < l$ est remplie, que la voûte subsistera d'elle-même sur son plan de naissance; car il ne pourra y avoir ni glissement sur le joint i et à plus forte raison sur tout autre, ni rotation autour de l'extrados du joint j ou j' et à plus forte raison autour de l'extrados d'un autre joint quelconque.

Ensuite, la comparaison des forces G, F, F', multipliées par leurs

bras de levier relatif à l'arête extérieure de la base du pied-droit (et ici G doit être censée appliquée au sommet de la clef) fera connaître le plus grand moment de poussée. Alors, H et L désignant généralement le bras de levier et la valeur de la poussée, qui sont les facteurs du plus grand moment; et M le moment de la demi-voûte et de son pied-droit, si l'on a $M > HL$, le système se soutiendra sur sa base, puisque déjà les parties supérieures ne peuvent se désunir et que de plus la poussée de la voûte sera incapable de renverser le pied-droit.

Remarque sur les joints de rupture effectifs et sur la pression réellement engendrée à la clef.

35. On remarquera que ceux des joints I, i, et J, j ou J,' j' suivant lesquels la voûte tend à se rompre et celle des limites G et F ou F' qui représente la plus grande poussée, n'auront une existence réelle et exclusive qu'autant que la voûte se trouvera dans un état très-peu différent de celui d'équilibre; car, autrement, la rupture pourra s'étendre à d'autres joints que ceux-là et la pression effectivement engendrée à la clef pourra ne pas atteindre la limite désignée. Par exemple, en fesant abstraction du glissement, si F surpasse f et que le joint J soit au-dessus de j, il ne pourra s'engendrer au sommet de la clef qu'une pression égale à f, puisque cette pression suffit pour faire tourner la partie supérieure au joint j autour de l'extrados de ce joint; cette pression, moindre que F, sera incapable d'empêcher la partie supérieure au joint J de tourner autour de l'intrados de ce joint; il y aura donc rupture à ces deux joints et parce qu'ils se rapportent l'un à un minimum l'autre à un maximum, la rupture s'étendra à ceux qui les avoisinent; de plus, il existera, en général, deux joints analogues à J, situés de part et d'autre et auxquels répondra une pression de même grandeur que f; ces joints collatéraux et tous ceux quils comprennent outre le joint J seront dans le même cas de rupture que lui. Cette remarque s'accorde avec l'expérience: on observe que, lors de la rupture, plusieurs joints s'ouvrent extérieurement à l'endroit du joint J et intérieurement à l'endroit du joint j et que les premiers sont en plus grand nombre que les autres.

3e Question.

Déterminer les dimensions que les pieds-droits doivent avoir pour résister à la poussée de la voûte.

36. Une voûte étant supposée stable sur son plan de naissance, déterminer les dimensions que son pied-droit doit avoir pour résister à la poussée.

Puisque, par hypothèse, la voûte est stable sur ses naissances, la double condition $I < l$ est satisfaite; d'ailleurs elle ne cessera pas de l'être lorsqu'on ajoutera des pieds-droits, puisque cette addition n'influe point sur les quantités G, g et F, f ou F', f'; il suffit donc de mettre le pied-droit en état de résister à la poussée de la demi-voûte.

Pour cela, HL étant le plus grand moment de poussée, par rapport à l'arête extérieure de la base du pied-droit, et M le moment total de la demi-voûte, exprimé en fonction de la hauteur et de l'épaisseur de ce pied-droit, on posera l'équation

$$M = HL \; . \; . \; . \; . \; (r)$$

qui fera connaître l'une des dimensions, savoir, l'épaisseur E et la hauteur h du pied-droit, quand l'autre sera donnée.

Remarques sur la solution de cette question.

Lorsque les deux quantités E et h sont obligées et que le premier membre de l'équation est moindre que le second, alors il faut charger la voûte sur les reins par un mur suffisamment élevé et terminé au plan vertical passant par l'extrados du joint auquel répond le plus grand moment de poussée, ou du moins à une distance telle que ce joint n'en soit pas changé.

Les valeurs négatives que peut donner l'équation sont étrangères à la question matérielle et tiennent à des considérations abstraites d'équilibre.

4e Question.

Déterminer la résistance qu'il faut ajouter à la partie inférieure, pour empêcher la voûte de glisser sur ses naissances.

37. Une voûte étant stable, à cela près qu'elle peut glisser sur ses joints de naissances, supposés horizontaux, déterminer la résistance qu'il convient d'ajouter à sa partie inférieure pour empêcher cet effet.

Cette question se résout bien aisément: θ étant toujours l'angle du frottement, q le poids de la demi-voûte, abstraction faite du pied-droit et I la plus grande poussée, on aura l'équation d'équilibre

$$I = q \tang \theta \; . \; . \; . \; (e)$$

Le poids q se composant des poids des parties supérieure et inférieure au joint de la plus grande poussée, on exprimera ce dernier poids en fonction soit de la largeur du joint de naissance, si l'on veut faire varier cette largeur, ou de la hauteur d'un massif dont on pourrait charger ce joint; l'équation fera connaître la valeur de l'une ou de l'autre quantité, suffisante à l'équilibre.

Manière d'avoir égard à la cohésion.

38. Lorsqu'on voudra avoir égard à la cohésion, on ajoutera au second membre de l'équation le terme γs, qui est le produit de la cohésion γ sur l'unité de surface, par l'aire s du joint de naissance; laquelle quantité s est aussi fonction de la largeur du joint.

Effet d'une surépaisseur vers la naissance ou d'un massif ajouté sur le pied-droit.

39. On remarquera que le surcroît d'épaisseur de la voûte vers le joint de naissance, ou l'addition d'un massif porté par le pied-droit n'influera point sur la pression à la clef et par conséquent contribuera à la stabilité par rapport à la rotation du système autour de l'arête extérieure de sa base.

Valeurs générales des coëfficiens du frottement et de la cohésion.

40. On se rappellera aussi que suivant les expériences de M. Boistard (Traité de la construction des ponts, par Gauthey, tome I, page 339) on a généralement $\tang \varphi = 0{,}76$, tandis que la cohésion est, par mètre carré, de 6960 Kg pour les mortiers de chaux et sable et de 3700 Kg pour les mortiers de chaux et ciment.

5e Question.

Déterminer les limites des épaisseurs d'une voûte dont l'intrados est donné.

41. L'intrados d'une voûte, sans pieds-droits, étant donné, déterminer les limites des épaisseurs sous lesquelles elle pourra se soutenir.

Cette question n'est pas susceptible d'une solution directe, à cause des quantités transcendantes que renferment les expressions (a), (b); pour lever la difficulté on aura recours à la méthode des fausses positions.

Il est clair que les limites cherchées, si toutes deux existent, seront données respectivement par les systèmes $L = l$; $L' < l'$ et $L' = l'$, $L < l$, relatifs à l'équilibre et eu égard à la restriction qui concerne les deux inégalités. (N.os 17 et 24).

Considérons d'abord le premier système; ayant supposé une épaisseur à la voûte, on évaluera les quantités G, g, F, f et F', f' pour en conclure les limites L, l et L', l', dont les deux dernières devront satisfaire à l'inégalité, sans quoi il faudrait changer l'épaisseur supposée; la comparaison des deux autres, qui devraient être égales, fera connaître l'erreur de la supposition. On se donnera une autre épaisseur avec laquelle on procédera de la même manière et qui produira une autre erreur. Au moyen des deux suppositions et des erreurs respectives on trouvera approximativement l'épaisseur qui convient à l'égalité $L = l$, et en vérifiant cette épaisseur on appréciera

le degré d'approximation et l'on s'assurera en même temps que la condition $I < l'$, est remplie. On aura ainsi une première limite des épaisseurs de la voûte.

A l'égard de l'autre système, on calculera pareillement les valeurs de I, l et I', l' moyennant celles de G, g, F, f et F', f', pour une épaisseur supposée et telle que l surpasse I. On connaîtra l'erreur relative à cette épaisseur en comparant les valeurs de I' et l' qui devraient être égales. Une nouvelle supposition amènera une nouvelle erreur; d'où l'on conclura la valeur approchée de l'épaisseur qui satisfait à l'égalité $I' = l'$ et qu'il faudra vérifier afin de juger du degré d'exactitude et de s'assurer que la condition $I < l$ est remplie. Ce sera la seconde limite des épaisseurs de la voûte.

Dans les applications on reconnaîtra, en comparant les pressions G relatives au glissement avec les pressions F et F' qui se rapportent à la rotation, que quand les premières excèdent les secondes, elles répondent à des épaisseurs de voûte, trop grandes pour être usitées; ce qui explique pourquoi la rupture par glissement a été rarement observée, relativement aux voûtes en berceau, exécutées selon les formes ordinaires.

6e Question.

Vérifier si une voûte proposée est capable de supporter une charge donnée.

42. Vérifier si une voûte proposée est capable ou non de supporter une charge donnée.

Cette question est tout-à-fait analogue à la deuxième et se résout par les mêmes principes: il faudra examiner si les deux conditions $I < l$, et $I' < l'$ sont satisfaites, en observant que les valeurs des quantités G, g; F, f et F', f' ainsi que les positions des joints respectifs I, i, J, j et J', j' dépendent tant de la grandeur que de la distribution de la charge donnée et varient avec ces circonstances.

Exemples

43. Quelques exemples feront concevoir la chose;

figure 10e

Lorsque la voûte est chargée d'une certaine épaisseur de matière, maçonnerie, terre, pavé &c., disposée de niveau et occupant toute son étendue, les poids de la partie supérieure $m\,n\,c\,c'$ et de la partie inférieure $m\,n\,f\,e$ sont augmentés de ceux des charges respectives $n\,p\,d\,c$, $n\,p\,g\,f$, ce qui change les valeurs des limites soit relatives soit absolues, ainsi que les positions des joints correspondans, et comme l'augmentation est à proportion plus grande pour la première partie

que pour l'autre, la poussée de la voûte s'accroîtra nécessairement.

figure 11.e — 44. Si la charge au lieu de s'étendre à toute la longueur de la voûte, ne portait que sur le sommet, un de ses effets serait encore d'accroître la poussée, mais elle n'ajouterait rien à la résistance du pied-droit. Le poids de chacune des deux parties supérieures serait augmenté de la moitié du poids de la charge et le centre de gravité serait déplacé en conséquence de la grandeur et de la position de ce poids additionnel.

45. La plupart des voûtes et particulièrement les arches de pont sont chargées d'un massif de maçonnerie, qui n'excède guère le niveau de la clef; selon que la voûte sera peu ou fort surbaissée, ce massif portant en grande partie sur le pied-droit, augmentera la résistance dans un plus grand rapport que la poussée, ou, appuyant principalement sur la partie supérieure, comme quand la voûte est en arc de cercle, rendra la poussée plus grande sans ajouter beaucoup à la résistance du pied-droit; de sorte que, dans le premier cas, l'épaisseur du pied-droit n'aura pas besoin d'augmentation, mais au contraire pourra être diminuée, si le massif est construit avant le décintrement de la voûte, et, dans le second cas, cette épaisseur devra être augmentée convenablement.

46. Quand la charge additionnelle porte pleinement sur le pied-droit, elle ne peut évidemment qu'en augmenter la résistance, ce qui permet d'en diminuer l'épaisseur, parce que le décroissement du bras de levier est suppléé par l'accroissement du poids.

47. La charge posant partie sur le pied-droit partie sur la voûte, de manière que son centre de gravité tombe entre la naissance et le milieu de l'ouverture, pourra être assez grande pour que le premier mode de rupture se change dans le second et alors la rupture sera impossible si la condition $I' < l'$ est satisfaite; sinon, il suffira de rendre la pression I' assez petite en modifiant la charge convenablement.

48. Enfin si la voûte était chargée d'un fluide, il faudrait chercher à l'aide des principes de l'hydrostatique, la pression normale, exercée sur la partie supérieure au joint indéterminé $m\,n$ et composer le poids de cette partie avec la pression relative; on emploierait ensuite la résultante au lieu du simple poids pour déterminer les limites.

49. Par un semblable procédé, on pourrait avoir égard au choc des bombes, lequel, suivant la théorie physico-mathématique,

de la percussion, (Architecture hydraulique de Prony, 1re partie, page 208.) peut être évalué en poids. C'est à l'expérience de fournir les élémens nécessaires à cette évaluation.

50. On voit par là qu'en général on pourrait établir l'équilibre dans une voûte où il n'existe pas, sans rien changer aux dimensions et seulement en augmentant par des charges additionnelles, convenables, le poids des parties qui tendent à tourner ou à glisser

7e Question.

Une voûte étant donnée, assigner la pression que supporte un joint quelconque.

51. Une voûte étant donnée, assigner la pression que supporte un joint quelconque.

I désignant la plus grande poussée et p le poids de la partie supérieure au joint quelconque $m\,n$, il est aisé de voir que la pression normale P, éprouvée par ce joint sera

$$P = p \sin \alpha + I \cos \alpha \ldots \quad (h)$$

Elle se réduit à I pour le joint vertical et au poids de toute la demi-voûte, pour le joint de naissance, supposé horizontal.

8e Question.

Une voûte étant donnée, déterminer la pression supportée par le cintre, en charpente, aux diverses époques de la construction.

52. Une voûte étant donnée, déterminer la pression supportée par son cintre en charpente, aux diverses époques de la construction.

On conçoit qu'un certain nombre des premières assises d'une voûte ont la propriété de se soutenir d'elles-mêmes et que la suivante commence à presser le cintre, parce que son plan de joint inférieur se trouve incliné sous un angle plus grand que 37 à 38° qui est également celui du frottement des voussoirs placés sur cales ou posés à sec les uns sur les autres.

Ainsi, à partir de cette inclinaison, chaque voussoir successif pèsera sur l'inférieur et pressera le cintre, jusqu'à celui dont le joint inférieur aura une inclinaison telle que la rotation autour de l'arête d'intrados soit devenue possible, c'est-à-dire, telle que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité passe en dehors de ce joint. La position de ce dernier voussoir dépendra tant du rapport entre la longueur et la largeur des voussoirs que de la courbure de la

voûte, et il pourra arriver que l'élément respectif du cintre fasse avec l'horizon un angle plus petit ou plus grand que 38°; dans le premier cas, le voussoir et chacun des suivans chargeront le cintre de tout leur poids; dans le second cas, le voussoir et ceux qui succèderont, jusqu'à ce que l'inclinaison ait atteint 38°, presseront les inférieurs et pèseront sur le cintre.

Généralement, la pression due à un voussoir quelconque s'obtiendra par les formules de l'équilibre d'un corps pesant, posé sur un ou sur deux plans inclinés et sujet à la résistance du frottement. Ces formules s'appliqueront directement au dernier voussoir posé. Pour le voussoir qui vient après, il devra être considéré comme soumis non seulement à la pesanteur, mais encore, s'il y a lieu, à la pression qui s'exerce sur son joint supérieur.

Les formules feront connaître la pression supportée soit par le cintre, soit par le joint inférieur, au moyen de quoi on passera au troisième voussoir et ainsi de proche en proche, jusqu'au dernier qui puisse presser le cintre.

Un phénomène qu'on observe souvent dans le progrès de la construction, c'est que, les voussoirs supérieurs poussant les inférieurs obligent la portion de voûte que forment ceux-ci à se soulever vers son milieu en s'ouvrant à l'extrados, de manière que la partie contiguë du cintre se trouve dégagée; aussi le calcul donnerait-il une valeur négative pour la pression exercée sur le cintre par chacun de ces derniers voussoirs (*)

Application de la théorie aux principaux cas de la pratique.

De la voûte en plein cintre.

53. La voûte en plein cintre ou dont la douelle a pour profil droit une demi-circonférence de cercle, joint à la beauté de la forme l'avantage de la solidité et de la facilité de la construction; néanmoins elle n'est pas toujours celle qu'on choisit dans la pratique: lorsqu'il s'agit de ponts, par exemple, comme elle a l'inconvénient d'obstruer le passage des eaux, on lui préfère les voûtes surbaissées qui sous la même montée et la même ouverture offrent un plus grand débouché.

(*) Ces trois dernières questions, à quelques changemens près, sont tirées des Notes de M. Navier, sur la science des Ingénieurs, par Bélidor.

Plein cintre extradossé parallèlement ; formules propres à ce genre.

54. Nous supposerons d'abord que la voûte ait une épaisseur constante.

figure 12e

On aura $x = mp$ pour le point m, $x = nq$ pour le point n, quel que soit celui des points c, c' dont il s'agisse ; mais on aura $y = pr$ pour le point m, $y = qr$ pour le point n, quand il s'agira du point c et $y = ps$ pour le point m, $y = qs$ pour le point n, quand il s'agira du point c' ; α sera en parties du rayon des tables l'arc qui mesure l'angle moc'. Cette notation est générale.

Soit $oc' = r$, $oc = R$; comme le poids est proportionnel à la surface du profil, celui de la portion de couronne $mncc'$, différence des deux secteurs moc', noc, sera

$$p = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)\alpha \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Le centre de gravité g de $mncc'$ se trouve ainsi que ceux des secteurs, sur la droite og qui divise l'angle moc' en deux parties égales ; il s'agit de déterminer la distance og : chacun des secteurs infiniment petits qui composent un secteur moc', ayant son centre de gravité sur sa ligne de milieu, aux deux tiers à partir du centre o, il s'ensuit que le centre de gravité g du secteur total moc', ne diffère pas de celui de l'arc il, décrit du centre o, avec un rayon $= \frac{2}{3}oc'$, c'est-à-dire que la distance δ de ce centre de gravité au centre o, est quatrième proportionnelle à l'arc il, à sa corde et à son rayon, ou quatrième proportionnelle à l'arc $mc' = r\alpha$, du secteur, à la corde $2r\sin\frac{1}{2}\alpha$ de cet arc et aux deux tiers de son rayon, ce qui donne $\delta = \frac{4r\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$; or, $moc' = \frac{1}{2}r^2\alpha$; donc le moment du secteur moc', par rapport à son centre o, est $\frac{2}{3}r^3\sin\frac{1}{2}\alpha$; celui du secteur noc sera de même $\frac{2}{3}R^3\sin\frac{1}{2}\alpha$; donc, par le principe des momens, $og = \frac{4(R^3 - r^3)\sin\frac{1}{2}\alpha}{3(R^2 - r^2)\alpha}$. De là, à cause de $gg' = og\sin\frac{1}{2}\alpha$, on conclut

$$gg' = \frac{4(R^3 - r^3)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3(R^2 - r^2)\alpha} \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Maintenant, $mm' = r\sin\alpha$, $om' = r\cos\alpha$; $nn' = R\sin\alpha$, $on' = R\cos\alpha$; de plus $mp = mm' - gg'$, $nq = nn' - gg'$ et $pr = oc - om'$, $qr = oc - on'$; $ps = oc' - om'$, $qs = oc' - on'$; par conséquent, les formules générales (a) et (b) donneront

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(\alpha + \theta)} \; . \; . \; . \; . \; (G), \quad \varphi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(\alpha - \theta)} \; . \; . \; . \; (g)$$

$$\varphi = \frac{3r(R^2 - r^2)\alpha\sin\alpha - 4(R^3 - r^3)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{6(R - r\cos\alpha)} \; . \; . \; (F), \quad \varphi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R} \; . \; . \; (f)$$

$$\varphi=\frac{1}{2}(R^2-r^2)\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{3}\frac{R^3-r^3}{r}\ldots(F'),\quad \varphi=\frac{3R(R^2-r^2)\alpha\sin\alpha-4(R^3-r^3)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{6(r-R\cos\alpha)}\ (f')$$

Résultats de la discussion de ces formules.

55. En discutant ces expressions on trouve que si $\theta=37^\circ$, le maximum de la première répond à $\alpha=24^\circ$ environ; que la seconde et la quatrième ne comportent chacune qu'un minimum relatif, qui répond à $\alpha=\frac{\pi}{2}$; que la troisième est susceptible d'un maximum absolu, dépendant du rapport $\frac{R}{r}$; enfin, que, dans le cas actuel, les deux dernières doivent être rejetées.

formules définitives.

56. Substituant donc les valeurs de α et celle de θ, égalant à zéro le coëfficient différentiel de la fonction (F), puis observant qu'on peut prendre pour la valeur maximum de φ, donnée par cette fonction, le rapport de la différentielle du numérateur à celle du dénominateur, et enfin posant $\frac{R}{r}=K$, on aura définitivement

$$G=0{,}1161.\,r^2(K^2-1)\ldots\ldots(G),\quad g=0{,}5918.\,r^2(K^2-1)\ldots\ldots(g)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2(K^3-1)}{3(K+1)}-K=\cos\alpha+(1-K\cos\alpha)\frac{\alpha}{\sin\alpha},\\ &F=r^2\left[\frac{1}{2}(K^2-1)\left(1+\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha\right)-\frac{1}{3}(K^3-1)\right]\end{aligned}\right\}\ldots(F)$$

$$f=r^2\left[0{,}7854.(K^2-1)-\frac{1}{3}\frac{K^3-1}{K}\right]\ldots\ldots(f)$$

Désignons par ε et par h l'épaisseur et la hauteur du pied-droit, de sorte que $H=R+h$ ou $H=r+h$; le moment de ce pied-droit par rapport à l'arête extérieure de sa base sera $\frac{1}{2}h\varepsilon^2$; posons $\alpha=\frac{\pi}{2}$ dans les expressions (1) et (2) afin qu'elles se rapportent à toute la demi-voûte et remarquons que le bras de levier, par rapport à la même arête est $\varepsilon+r-gg'$, l'équation $M=HL$, deviendra

$$\frac{1}{2}h\varepsilon^2+\frac{1}{4}\pi(R^2-r^2)\varepsilon+\frac{1}{4}\pi r(R^2-r^2)-\frac{1}{3}(R^3-r^3)=HL\ldots(n).$$

Telles sont les formules propres à la voûte en plein cintre d'une épaisseur constante.

L'équation (n) détermine l'une des quantités ε et h par le moyen de l'autre, et comme la moindre épaisseur qu'on puisse donner au pied-droit est l'épaisseur même de la voûte, si l'on voulait savoir quelle valeur de h répond à cette limite, on substituerait $R-r$ et $R+h$ ou $r+h$ au lieu de ε et de H, dans cette équation qui n'en serait pas moins du premier degré en h et qui donnerait la valeur de cette quantité.

Cas où l'extrados est chargé d'une masse de terre.

57. Il pourrait arriver que le plein cintre fût chargé d'une masse de terre, élevée jusqu'à un certain niveau VV', au-dessus de la clef: alors il faudrait ajouter soit au poids soit au moment

de la couronne de maçonnerie, $m\,n\,c\,c'$, le poids ou le moment de la masse de terre $n\,t\,c\,v\,v'$, lequel équivaudra à celui du rectangle $n\,n'\,v\,v'$; plus celui du triangle $o\,n\,n'$; moins celui du secteur $o\,c\,n$.

Plein cintre extradossé horizontalement; formules particulières.

58. Considérons actuellement le plein cintre à extrados horizontal cK. Le pentagone $c'm\,n\,u\,c$ vaut le rectangle $c\,u\,n\,n'$, plus le triangle $n\,o\,n'$, moins le secteur $c'o\,n$; soit encore $oc'=r$, $oc=R$ et l'angle $c'om=\alpha$, on aura $m\,m'=r\sin\alpha$, $n\,n'=R\sin\alpha$, $om'=r\cos\alpha$, $on'=R\cos\alpha$; les surfaces du rectangle, du triangle et du secteur s'exprimeront par $R^2\sin\alpha(1-\cos\alpha)$, $\frac{1}{2}R^2\sin\alpha\cos\alpha$, $\frac{1}{2}r^2\alpha$; d'où

$$p=\tfrac{1}{2}R^2\sin\alpha(2-\cos\alpha)-\tfrac{1}{2}r^2\alpha;$$

les distances des centres de gravité de ces surfaces à la verticale oc, seront respectivement $\frac{1}{2}R\sin\alpha$, $\frac{1}{3}R\sin\alpha$, $\frac{4r\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$, lesquelles retranchées soit de $m\,m'$, soit de $n\,n'$, donneront les bras de levier relatifs au point m ou n et par le principe des momens on obtiendra directement le moment px. D'ailleurs, on a toujours, par rapport au point c, $m'c=pr=R-r\cos\alpha$, $n'c=qr=R(1-\cos\alpha)$ et par rapport au point c', $m'c'=ps=r(1-\cos\alpha)$, $n'c'=qs=r-R\cos\alpha$. Si donc, afin d'abréger, on pose $\frac{R}{r}=K$, il viendra

$$p=\tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha\left[K^2(2-\cos\alpha)-\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right],$$

et respectivement pour les points m et n,

$$px=\tfrac{1}{6}r^3\left\{K^2\sin^2\alpha\left[6-3K-(3-2K)\cos\alpha\right]+2(1-\cos\alpha)-3\alpha\sin\alpha\right\};$$

$$px=\tfrac{1}{6}r^3\left\{K^3\sin^2\alpha(3-\cos\alpha)+2(1-\cos\alpha)-3K\alpha\sin\alpha\right\};$$

d'où résulteront d'abord les expressions

$$\varphi=\frac{px}{R-r\cos\alpha}\ldots(1),\quad \varphi=\frac{px}{R(1-\cos\alpha)}\ldots(2)\ \text{et}\ \varphi=\frac{px}{r(1-\cos\alpha)}\ldots(3),\ \varphi=\frac{px}{r-R\cos\alpha}(4),$$

selon que la force φ résidera en c ou en c'.

Ensuite pour les deux (1) et (4) on fera immédiatement $\frac{d\varphi}{d\alpha}=0$, on développera et l'on réduira, après quoi l'on remplacera dans ces mêmes expressions $2(1-\cos\alpha)$ par $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$; mais pour les deux (2) et (3), on commencera par faire disparaître le dénominateur, en effectuant la division, puis l'on fera aussi $\frac{d\varphi}{d\alpha}=0$; on obtiendra ainsi les formules,

$$\varphi=\frac{r^2\sin\alpha}{2\tang(\alpha+\theta)}\left[K^2(2-\cos\alpha)-\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right]\ldots\quad\ldots(G)$$

$$\left.\begin{aligned}&2K^2(3-2K)\cos^3\alpha-6K^2(1+K-K^2)\cos^2\alpha+3(1+4K^3-2K^4)\cos\alpha+3(1-K\cos\alpha)\frac{\alpha}{\sin\alpha}=2K^4-6K^3+6K^2+K-2,\\ &F=\frac{r^2\sin^2\alpha}{6(K-\cos\alpha)}\left\{K^2\left[6-3K-(3-2K)\cos\alpha\right]+\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}-3\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right\},\ldots\end{aligned}\right\}(F)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{8}{3}K^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha = 1, \ldots \\ &f = \frac{1}{6} r^2 \left\{ K^2 \cos\alpha\,(2-\cos\alpha) - 6\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha \frac{\alpha}{\sin\alpha} + 3K^2 + \frac{2}{K} \right\} \ldots \end{aligned}\right\} (f)$$

$$\left.\begin{aligned} &K^2\cos\alpha\left[9-5K-(6-4K)\cos\alpha\right] + 3\frac{\alpha}{\sin\alpha} = K^2(3-K)+3, \ldots \\ &F' = \frac{1}{6} r^2 \left\{ K^2\cos\alpha\left[3-K-(3-2K)\cos\alpha\right] - 6\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\frac{\alpha}{\sin\alpha} + 3K^2(2-K)+2 \right\} \ldots \end{aligned}\right\} (F')$$

$$\left.\begin{aligned} &2K^4\cos^3\alpha - 3K^3(1+K)\cos^2\alpha + 3K^2(1+2K)\cos\alpha + 3K(K-\cos\alpha)\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 3K^4 - K^3 + 5K - 2, \\ &f' = \frac{r^2\sin^2\alpha}{6(1-K\cos\alpha)}\left[K^3(3-\cos\alpha) + \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha} - 3K\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right]; \ldots \end{aligned}\right\} (f')$$

Quant à l'équation (n), un moyen fort simple d'y parvenir, c'est de considérer le moment M comme composé des momens des rectangles aj, cd, moins celui du secteur aoc' et l'on a sur le champ,

$$\tfrac{1}{2}(h+R)\varepsilon^2 + r\left(R - \tfrac{1}{4}\pi r\right)\varepsilon + r^2\left(\tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{3}r - \tfrac{1}{4}\pi r\right) = HL \ldots (n)$$

les quantités H et L se rapportant ou au point c ou au point c'.

Cas où l'extrados est chargé d'une couche de maçonnerie, terre &c.

59. Lorsque l'extrados horizontal sera chargé d'une couche de maçonnerie, de terre &c on aura égard à cette circonstance, en ramenant; pour plus de simplicité, cette couche à une autre de même densité que la maçonnerie de la voûte; mais alors il faudra renoncer aux équations de condition du maximum ou du minimum des expressions (a) et (b), parce qu'elles deviendraient trop compliquées. Au reste, la maçonnerie qui couvre les reins et la clef doit être regardée comme indépendante de celle de la voûte proprement dite et comme assez récente pour être susceptible de se comprimer et de permettre aux voussoirs inférieurs d'obéir à l'action qu'elle exerce sur eux.

Plein cintre extradossé en chape; formules particulières.

figure 13e.

60. Un autre cas usité de la voûte en plein cintre est celui où l'extrados est disposé en chape ou en dos d'âne.

Désignons par I l'inclinaison odt de la chape à la verticale et par B la hauteur od au-dessus de la naissance a. Supposons cette chape d'une maçonnerie distincte de celle de la voûte et assez récente pour qu'elle puisse se comprimer et peser proportionnellement à son épaisseur sur chaque partie inférieure de la voûte proprement dite.

Abaissons du point t la perpendiculaire tu sur od; nous aurons les proportions, $\sin(I+\alpha) : \sin\alpha :: B : td = \dfrac{B\sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$; $1 : \sin I :: td : tu = \dfrac{B\sin I\sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$. Ainsi l'expression de la surface du triangle odt sera

$\frac{1}{2}B^2\dfrac{\sin I\sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$; celle de la surface du secteur $c'om$ est $\frac{1}{2}r^2\alpha$; on a donc $mc'dt = p = \frac{1}{2}B^2\dfrac{\sin I\sin\alpha}{\sin(I+\alpha)} - \frac{1}{2}r^2\alpha$.

Le moment de ce quadrilatère $m\,c'\,d\,t$ par rapport au point m ou n est égal à la différence des momens du triangle et du secteur; or, les distances des centres de gravité de ces deux dernières figures à la verticale sont respectivement $\frac{1}{3}\,t\,u$ et $\frac{4r\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$; donc, à cause de $m\,m' = r\sin\alpha$, $n\,n' = R\sin\alpha$, et de $m'c = R - r\cos\alpha$, $n'c = R(1-\cos\alpha)$, si la force φ est appliquée en c, ou de $m'c' = r(1-\cos\alpha)$, $n'c' = r - R\cos\alpha$, si cette force agit en c', on aura (*),

$$\frac{\sin\alpha}{2\,\text{tang}(\theta+\alpha)}\left[B^2\frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} - r^2\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

et respectivement pour les points m, n,

$$px = \frac{1}{6}\sin^2\alpha\left\{B^2\frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)}\cdot\left[3r - B\frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)}\right] - r^3\left[3\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right]\right\},$$

$$px = \frac{1}{6}\sin^2\alpha\left\{B^2\frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)}\left[3R - B\frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)}\right] - r^2\left[3R\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{r}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right]\right\};$$

puis, selon qu'il s'agira du point c ou c',

$$\varphi = \frac{px}{R - r\cos\alpha} \ldots\ldots (F), \quad \varphi = \frac{px}{R(1-\cos\alpha)} \ldots\ldots (f)$$

et

$$\varphi = \frac{px}{r(1-\cos\alpha)} \ldots\ldots (F'), \quad \varphi = \frac{px}{r - R\cos\alpha} \ldots\ldots (f')$$

L'équation (n) s'obtiendra immédiatement par la considération que le moment M se compose des momens du rectangle $a\,j$ et du triangle $d\,o\,l$, moins celui du secteur $a\,o\,c'$; d'où résulte tout de suite

$$\frac{1}{2}h\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(B^2\,\text{tang}\,I - \frac{1}{2}\pi r^2\right)\varepsilon + \frac{1}{6}B^2\,\text{tang}\,I\left(3r - B\,\text{tang}\,I\right) + \frac{1}{12}r^3(4-3\pi) = HL \ldots (n),$$

les quantités H et L étant rapportées au point c ou au point c'.

Dans l'exécution, on supprime non seulement le petit triangle de maçonnerie $i\,k\,l$, mais encore le trapèze de terre $l\,k\,k'\,l'$, lorsque la chape est recouverte d'une couche de cette matière. Pour simplifier et pour ne pas tomber sur une équation du troisième degré, d'où dépendrait à la rigueur la valeur de ε, on établit les formules sans tenir compte de ces suppressions qui sont d'ailleurs en faveur de la solidité.

Voûte en anse de panier.

61. On appelle anse de panier un cintre composé de plusieurs arcs de cercle qui se raccordent. Sa forme se rapproche de celle d'une demi-ellipse, mais a sur cette dernière, entre autres avantages, celui de produire plus de dégagement vers les naissances, sans augmenter la montée. On donne à une anse de panier 3 ou 5, 7

(*) L'auteur du mémoire sur la poussée des voûtes (N.° 4 du mémorial, page 35) détermine le moment du trapèze $b\,m\,v\,d$ par une intégration immédiate, en appliquant la méthode que M.r Poisson explique dans sa mécanique (tom. 1, n.° 106); mais cet auteur a oublié au numérateur du premier terme de l'expression qu'il trouve et dont la forme est d'ailleurs compliquée, la quantité $-r\cos\alpha$.

et jusqu'à 11 centres, selon que la montée doit être au-dessus ou au-dessous du tiers de l'ouverture: par là, en évitant des changemens de courbure trop marqués et qui seraient d'un aspect désagréable, on diminue encore l'inconvénient attaché à l'ellipse d'exiger un panneau particulier pour chaque tête de voussoir dans la demi-voûte.

Conditions du tracé.

62. Les conditions auxquelles le tracé de l'anse de panier doit satisfaire, sont: 1° que la tangente au point extrême de la montée, soit horizontale; 2° que les tangentes aux naissances soient verticales; 3° que les différens arcs qui la composent se touchent à leur rencontre.

Tracé de l'anse de panier à trois centres.
figure 14e.

63. Considérons d'abord la courbe à trois centres et désignons par a la demi-ouverture ca, par b la montée cb, par r, r' les rayons ob, $o'a$ des arcs du sommet et de la naissance et par y, x les distances oc, $o'c$ des centres o, o' au point c.

On satisfait aux deux premières conditions en plaçant les deux centres respectivement sur la verticale cb et sur l'horizontale ca et, à cause de $r=b+y$, $r'=a-x$, la troisième condition sera exprimée par l'équation

$$b+y=a-x+\sqrt{x^2+y^2}\ldots\quad(1).$$

On n'a donc que cette seule relation entre x, y ou entre les rayons r, r'; d'où il suit que la question est indéterminée; par conséquent, on peut s'imposer une quatrième condition, celle, par exemple, que le rapport du grand au petit rayon soit un minimum. Or ce rapport n'est autre chose que le premier membre de l'équation (1) écrite sous la forme,

$$\frac{b+y}{a-x}=1+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a-x};\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

sa différentielle égalée à zéro donnera

$$(a-x)\,dy+(b+y)\,dx=0,$$

et réduira celle de l'équation (2) à

$$(a-x)(x\,dx+y\,dy)+(x^2+y^2)\,dx=0;$$

éliminant $\frac{dy}{dx}$, on a

$$ax-by=0;$$

combinant ce résultat avec (1) et posant, pour abréger, $e=\sqrt{a^2+b^2}$, on trouve

$$x=\frac{b(a-b)}{a+b-e},\quad y=\frac{a(a-b)}{a+b-e};$$

d'où

$$r' = c\frac{c-(a-b)}{2a}, \quad r = c\frac{c+(a-b)}{2b} \ldots (3)$$

valeurs dont la construction est fort simple : on prend $bd = a-b$ et sur le milieu e de ad on élève la perpendiculaire eo qui coupe bc et ac aux centres o, o' cherchés ; car $ae = \frac{c-(a-b)}{2}$, $be = \frac{c+(a-b)}{2}$, et en comparant au triangle abc, les triangles aeo', beo qui lui sont semblables, on retrouve les valeurs de r' et de r ; par conséquent aussi celles de x et de y.

En désignant par c l'angle coo', on aura évidemment . . . . $\text{tang}\, c = \frac{x}{y} = \frac{b}{a}$

Si l'on voulait que la différence $b+y-(a-x)$ des rayons fût un minimum, on aurait

$$dx + dy = 0,$$

et la différentielle de l'équation (1) se réduirait à

$$xdx + ydy = 0;$$

d'où l'on conclut

$$x = y = (a-b)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad c = 45°;$$

et

$$r' = b - \frac{a-b}{\sqrt{2}}, \quad r = a + \frac{a-b}{\sqrt{2}} \ldots (4)$$

Pour construire ces valeurs on portera cb en af, on prendra $cg = cf$ et les arcs décrits des centres f et g, avec un rayon égal à la moitié de fg, détermineront les centres demandés o' et o ; ce qu'il est facile de vérifier.

On voit que la différence $r - r' = (a-b)(1+\sqrt{2})$ des rayons est proportionnelle à la différence $a-b$ de la demi-ouverture et de la montée. Les deux rayons approchant plus de l'égalité, le cintre aurait une apparence plus agréable ; mais comme ils sont moindres respectivement que les précédens, la voûte aurait moins de capacité intérieure.

figure 15.e

Communément on détermine les rayons par la condition que les arcs soient chacun de 60° ; alors on a $\sqrt{x^2+y^2} = 2x$, $y = x\sqrt{3}$ et l'équation (1) donne

$$x = \frac{1}{2}(a-b)(1+\sqrt{3}) \ldots\ldots (5).$$

Cette valeur peut se construire ainsi : on porte ac en bf, sur le milieu g de cf on élève la perpendiculaire $gh = cg$ et du point h, comme centre, on décrit avec le rayon cf un arc qui coupe l'axe horizontal au centre cherché o'. Dans ce cas l'angle $coo' = c = 30°$.

formules propres à la voûte de cette espèce ; cas où elle est extradossée parallèlement.

figure 16e.

64. Cherchons maintenant les formules propres à ce genre de voûtes : soit $Ca=a$, $Cc'=b$, l'angle $coi=c$, $oc=R$, $oc'=r$, $o'i=R'$, $o'e=r'$ et représentons par S et s les surfaces $ec'ci$, $emni$; par V, v leurs momens relatifs aux verticales oc, $o'd$ respectivement, et par M, m et N, n leurs momens respectifs, par rapport aux points m et n. Posant $\frac{R}{r}=K$, $\frac{R'}{r'}=K'$ et observant que $mm'=\ldots\ldots$ $r'\sin\alpha+Co'$, $nn'=R'\sin\alpha+Co'$, $Co'=(r-r')\sin c$ et que la ligne qui divise l'angle $mo'e$ en deux parties égales fait avec la verticale un angle $\frac{1}{2}(\alpha-c)+c=\frac{1}{2}(\alpha+c)$, on trouvera sans difficulté

$$S=\tfrac{1}{2}r^2(K^2-1)c,\quad s=\tfrac{1}{2}r'^2(K'^2-1)(\alpha-c);$$

$$V=\tfrac{2}{3}r^3(K^3-1)\sin^2\tfrac{1}{2}c,\quad v=\tfrac{2}{3}r'^3(K'^3-1)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-c)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+c);$$

$$M=S\left[(r-r')\sin c+r'\sin\alpha\right]-V;\quad m=sr'\sin\alpha-v;$$

$$N=S\left[(r-r')\sin c+R'\sin\alpha\right]-V;\quad n=sR'\sin\alpha-v;$$

et parce que c ou c' étant le point d'application de la force φ, on a $m'c=td=b+r(K-1)-r'\cos\alpha$, $n'c=vd=b+r(K-1)-R'\cos\alpha$, et $m'c'=b-r'\cos\alpha$, $n'c'=b-R'\cos\alpha$, il viendra ces formules abrégées,

$$\varphi=\frac{S+s}{\operatorname{tang}(\alpha+\theta)}\ldots\ldots(1),\quad \varphi=\frac{S+s}{\operatorname{tang}(\alpha-\theta)}\ldots\ldots\ldots(2)$$

et

$$\varphi=\frac{M+m}{b+r(K-1)-r'\cos\alpha}\ldots(3),\qquad \varphi=\frac{N+n}{b+r(K-1)-R'\cos\alpha}\ldots(4)$$

ou

$$\varphi=\frac{M+m}{b-r'\cos\alpha}\ldots\ldots(5),\quad \varphi=\frac{N+n}{b-R'\cos\alpha}\ldots\ldots\ldots(6),$$

dont le développement se réduira à de simples substitutions. Maintenant, la distance du centre de gravité de $ec'ci$ ou S à la verticale oc est $\frac{V}{S}$; en la retranchant de CR ou $\varepsilon+a$, on aura la distance à la verticale jR. Fesons $\alpha=\frac{\pi}{2}$ dans les expressions de s et de v ; elles deviendront celles de la surface $aeif$ ou s' et de son moment v' relatif à la verticale $o'd$; et à cause de

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}c\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}c\right)\text{ et de }2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}c\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}c\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+c\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-c\right)=\cos c;$$

nous trouverons

$$s'=\tfrac{1}{2}r'^2(K'^2-1)\left(\tfrac{\pi}{2}-c\right);\quad v'=\tfrac{1}{3}r'^3(K'^3-1)\cos c;$$

or, la distance du centre de gravité de s' à la verticale $o'd$, est $\frac{v'}{s'}$; en la retranchant de $o'R=\varepsilon+r'$, nous aurons la distance à la verticale jR ; de là résultera l'équation

$$\tfrac{1}{2}h\varepsilon^2+(S+s')\varepsilon+Sa+s'r'-V-v'=HL\ldots\ldots(p)$$

Cas où elle est extradossée de niveau.

65. Représentons semblablement par S et s les surfaces $cc'eil$, $liemnu$; par M, m et N, n leurs momens respectifs par rapport aux points m et n. On a $cc'eil = clii' + oii' - c'eo$; $liemnu = \ldots\ldots$ $dvnu + nvo' - (dhil + iho') - emv'$. Or, $oi' = R\cos c$, $ii' = R\sin c$, $ci' = R(1-\cos c)$; soit, pour abréger, $Cc = b + R - r = b'$, il viendra $vo' = R'\cos\alpha$, $nv = R'\sin\alpha$, $vd = b' - R'\cos\alpha$, $ho' = R'\cos c$, $ih = R'\sin c$, $hd = b' - R'\cos c$.

Cela posé, on aura d'abord,

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \sin c \left[K^2(2-\cos c) - \frac{c}{\sin c}\right],$$

$$s = \tfrac{1}{2} r'^2 \sin(\alpha - c)\left[2\frac{l'K'}{r'}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+c)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-c)} - K'^2\cos(\alpha+c) - \frac{\alpha-c}{\sin(\alpha-c)}\right];$$

puis en prenant subsidiairement le moment V de S par rapport à la verticale oc, le moment v de s par rapport à la verticale $o'd$ et observant que $mm' = r'\sin\alpha + (r-r')\sin c$, $nn' = R'\sin\alpha + (r-r')\sin c$; $ml = r'\sin\alpha$, on trouvera

$$V = \tfrac{2}{3} r^3 \sin^2\tfrac{1}{2}c\left[1 + K^2\cos^2\tfrac{1}{2}c\,(3 - 2\cos c)\right],$$

$$v = \tfrac{1}{6} r'^3\left[4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+c)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-c) + 3\frac{l'K'^2}{r'}\sin(\alpha+c)\sin(\alpha-c) - 2K'^3(\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin^2 c\cos c)\right]$$

et

$$M = S\left[r'\sin\alpha + (r-r')\sin c\right] - V;\quad m = s\,r'\sin\alpha - v;$$

$$N = S\left[R'\sin\alpha + (r-r')\sin c\right] - V;\quad n = s\,R'\sin\alpha - v.$$

Enfin si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans s et dans v, il viendra . . . . . .

$$s' = \tfrac{1}{2} r'^2\cos c\left[K'^2\sin c + 2\frac{l'K'}{r'}\,\mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c\right) - \frac{\frac{1}{2}\pi - c}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - c\right)}\right],$$

$$v' = \tfrac{1}{6} r'^3\cos c\left[2 + 3\frac{l'K'^2}{r'}\cos c + 2K'^3\sin^2 c\right].$$

Les expressions (1), (2) et (3), (4) ou (5) (6) auront ainsi que l'équation (n), en S, s, M, m, N, n et s', v', la même forme absolument que dans le cas précédent, si ce n'est que pour l'équation (n) les quantités s' et v' devront comprendre le rectangle fK.

De l'anse de panier extradossée en chape.

66. Nous ne parlerons point de l'anse de panier extradossée en chape, parce qu'elle a une poussée excessive et par cette raison exige une trop grande épaisseur de pied-droit, pour qu'on puisse l'employer.

Tracé de l'anse de panier à plus de trois centres.

67. Quand la montée est moindre que le tiers de l'ouverture, la grande différence qui se trouve entre les rayons r, r' rendant le cintre difforme, il devient nécessaire de passer de la courbure du sommet à celle des naissances, par des courbures intermédiaires; c'est-à-dire, de composer le cintre d'un nombre d'arcs plus grand que trois, et alors la question est encore plus indéterminée; car, puisqu'il suffit que l'arc du sommet embrasse ceux des naissances, ou que le plus grand rayon surpasse la somme du plus petit et de la distance

des centres, on n'a que la condition $(r-r')^2 > (r-b)^2 + (a-r')^2$, laquelle n'est pas même une équation.

figure 17.

On dispose de cette indétermination de la manière suivante: supposé que ω soit le centre de l'arc du sommet, on prend $c\omega' = \frac{1}{3} c\omega$ (le rapport $\frac{1}{3}$ est arbitraire), et l'on regarde ω' comme le centre de l'arc de naissance; cela fait, s'il s'agit de l'anse de panier à cinq centres, on divise $c\omega$ en deux parties ωd, dc égales entre elles et $\omega' c$ en deux parties $\omega' e$, ec proportionnelles aux nombres 1, 2; on mène les droites ωe, $\omega' d$ qui se coupent au point ω'' et prenant ce point pour le centre de l'arc intermédiaire dont r'' désigne le rayon, on détermine la distance ωc et par conséquent les rayons r, r', r'' par la condition que la montée $cb' = cb = b$.

Le calcul direct des rayons serait long et compliqué; on le simplifie par ce procédé remarquable, rapporté dans le traité de Gauthey: la construction précédente, dans laquelle ω est supposé le centre de l'arc du sommet, étant effectuée, on connaîtra les longueurs l, l', p de ωc, $\omega' c$, $\omega\omega'' + \omega''\omega'$; or, si o, o'', o' étaient les véritables centres, les figures $c\omega\omega''\omega'$ et $coo''o'$ seraient évidemment semblables; donc en fesant $oc = x$, $o'c = y$, $oo'' + o''o' = z$, on aura $x = \frac{ly}{l'}$, $z = \frac{py}{l'}$ et comme $x + b = z + a - y$, il s'ensuivra,

$$x = \frac{(a-b)\,l}{l+l'-p}, \quad y = \frac{(a-b)\,l'}{l+l'-p} \quad \ldots\ldots (4)$$

de là les rayons r, r', r'' et les angles qu'ils font avec la verticale. Quel que soit le nombre N des centres, si l'on en retranche l'unité et que n soit la moitié du reste, en sorte que $n = \frac{N-1}{2}$, il n'y aura qu'à diviser la distance ωc en n parties égales, et la distance $\omega' c = \frac{1}{3}\omega c$, en un pareil nombre de parties qui soient entre elles comme $1, 2, 3, \ldots\ldots n$, puis joindre ω avec le point de division de $\omega' c$, le plus voisin de c, et ainsi de suite. Cela fait, on trouvera les véritables centres en répétant la même division sur les lignes oc, $o'c$ déterminées au moyen des deux équations (4) dans lesquelles p sera le périmètre $\omega'\omega''\omega''' \ldots\ldots \omega$. On voit que les lignes $a\,o\,o'' \ldots \ldots o$ et $a\,a'\,a'' \ldots b$ sont analogues à une développée et sa développante; de sorte que $ob = a\,o'o'' \ldots\ldots o$. Mais quand même la voûte serait surbaissée au quart, il serait inutile de composer l'anse de panier d'un grand nombre d'arcs et en général il suffit d'en employer cinq.

Des formules propres aux voûtes de ce genre.

68. Comme le joint de plus grande poussée peut répondre à l'arc intermédiaire ou à l'arc des naissances, il faut calculer les formules pour chacun de ces cas. Le premier rentre dans celui de l'anse de panier à trois centres; pour le second, on aura à considérer trois portions du profil, au lieu de deux, mais le procédé sera tout-à-fait analogue, que la voûte soit extradossée parallèlement ou de niveau. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce sujet.

Voûte en arc de cercle.

69. Le cintre de la voûte en arc de cercle est un seul arc qui est tout déterminé dès que l'ouverture $2a$ et la montée b sont connues. Soit r le rayon de l'arc et $2c$ l'angle au centre, entre les côtés duquel cet arc est compris; on aura $a^2=b(2r-b)$, $\sin c=\frac{a}{r}$, équations d'où l'on tire

$$r=\frac{a^2+b^2}{2b},\quad \sin c=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

et qui en général feront connaître deux des quatre quantités a, b, c, r, quand les deux autres seront données.

La voûte en arc de cercle extradossée parallèlement ou de niveau, ou en chape n'est qu'un cas particulier de la voûte en plein cintre, extradossée de même, et les formules propres à celle-ci s'appliquent à l'autre, avec quelques modifications qui concernent principalement l'équation $M=HL$.

Cas où la voûte est extradossée parallèlement : formules.

figure 18

70. Lorsque la voûte en arc de cercle sera extradossée parallèlement, on fera $\lambda=c$, dans les expressions (g), (f) et (G), (F) propres à la voûte en plein cintre d'égale épaisseur, pourvu que la valeur de λ, à laquelle répondra le maximum de chacune des deux dernières expressions, soit plus grande que c; autrement, on y conservera la valeur de λ, relative au maximum.

D'ailleurs, on a $ac'cf=\frac{1}{2}(R^2-r^2)c$, $gg'=\dfrac{4(R^3-r^3)\sin^2\frac{1}{2}c}{3(R^2-r^2)c}$; en outre, la distance du centre de gravité g de $ac'cf$ à la verticale passant par l'arête extérieure de la base du pied-droit, sera $\varepsilon+a-gg'$, et, par rapport à cette même arête, le moment de la figure $afrj$, équivaudra au moment $\frac{1}{2}[h+(R-r)\cos c]\varepsilon^2$, du rectangle ej, moins le moment $\frac{1}{2}(R-r)^2\sin c\cos c[\varepsilon-\frac{1}{3}(R-r)\sin c]$, du triangle aef.

En conséquence, l'équation (n) sera

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}[h+(R-r)\cos c]\varepsilon^2+\frac{1}{2}[(R^2-r^2)c-(R-r)^2\sin c\cos c]\varepsilon+\frac{1}{6}(R-r)^3\sin^2 c\cos c+\\ \frac{1}{2}a(R^2-r^2)c-\frac{2}{3}(R^3-r^3)\sin^2\frac{1}{2}c=HL\,..\end{array}\right\}(n)$$

Dans ce cas, la poussée surpasse en général le frottement exercé sur le plan ai de naissance et il faut prévenir le glissement par quelque moyen d'art.

Cas où la voûte est extradossée de niveau et en chape ; formules.

71. Pareillement, quand la voûte en arc de cercle est extradossée soit de niveau, soit en chape, les formules (G), (g) et (F), (f) ou (F'), (f') relatives aux cas analogues de la voûte en plein cintre, lui sont applicables, supposé la substitution, s'il y a lieu, de l'angle c à l'angle α.

Le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure de la base du pied-droit, s'obtiendra fort simplement en observant qu'il équivaut, dans le premier cas, à la somme des momens du rectangle aj, du rectangle CK et du triangle Cao, moins le moment du secteur aoc', et dans le second cas, à la somme des momens du rectangle aj, des triangles Cdl, Cao, moins le moment du secteur aoc', en sorte que l'équation (n) sera, pour la voûte à extrados horizontal,

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}(h+R-r\cos c)E^2+\left[a\left(R-\frac{1}{2}r\cos c\right)-\frac{1}{2}r^2c\right]E+\frac{1}{2}a\left[a\left(R-\frac{1}{3}r\cos c\right)-r^2c\right]+\\ \frac{2}{3}r^3\sin^2\frac{1}{2}c=HL\ldots\end{array}\right\}\ldots(n)$$

et pour la voûte extradossée en chape,

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}hE^2+\frac{1}{2}\left[B^2\tang I+r(a\cos c-rc)\right]E+\frac{1}{2}B^2\tang I\left(a-\frac{1}{3}B\tang I\right)+\\ \frac{1}{2}ar\left(\frac{2}{3}a\cos c-rc\right)+\frac{2}{3}r^3\sin^2\frac{1}{2}c=HL\ldots\end{array}\right\}(n)$$

Plate-bande ; formules, figure 19e.

72. On appelle plate-bande une voûte plane dans le profil de laquelle la douelle et l'extrados sont des droites horizontales et les joints d'autres droites obliques aux premières, mais dirigées à un même point de l'axe vertical du profil. Soit l'angle $c'od=c$, $c'd=a$, $cc'=e$, $oc'=r$; les surfaces des triangles $oc'm$, ocn seront $\frac{1}{2}(e+r)^2\tang\alpha$, $\frac{1}{2}r^2\tang\alpha$ et leur différence équivaudra à la surface p du trapèze $c'mnc$; de sorte que l'on aura $p=\frac{1}{2}\left[(e+r)^2-r^2\right]\tang\alpha$. Les distances des centres de gravité de ces triangles à la verticale oc seront $\frac{1}{3}(e+r)\tang\alpha$, $\frac{1}{3}r\tang\alpha$; divisant la différence des momens par la différence des surfaces, on trouvera la distance du centre de gravité du trapèze à la même verticale, et cette distance retranchée de $c'm$ ou $r\tang\alpha$, donnera

$x=\dfrac{(3r^2-e^2)e\tang\alpha}{3\left[(e+r)^2-r^2\right]}$; de là résulteront les expressions

$$\varphi=\frac{1}{2}\left[(e+r)^2-r^2\right]\frac{\tang\alpha}{\tang(\alpha+\theta)}\ldots\ldots(G)$$

$$\varphi=\frac{1}{6}\left(3r^2-e^2\right)\tang^2\alpha\ldots\ldots\ldots(F)$$

dont la première montre qu'abstraction faite du frottement, la force φ sera constante, si les joints sont dirigés à un même point o et réciproquement. Pour le maximum de cette première, on a $\sin 2(\alpha+\theta)=\sin 2\alpha$; d'où $\alpha+\theta=90°-\alpha$; soit $\tang\theta=0{,}76$, c'est-à-dire, $\theta=37°\,14'$, il

s'ensuivra $\alpha = 26°\text{-}23'$. La seconde n'a point de maximum absolu et sa plus grande valeur répond à $\alpha = c$. On substituera dans ces expres-sions les valeurs de α, et $\frac{a}{\tang c}$ au lieu de r. Quant à l'équation (μ), on la formera en observant que le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure de la base du pied-droit, équivaut à la somme des momens des deux rectangles $a\,b'$, $c\,b'$ et l'on aura pour l'espèce de voûte dont il s'agit, les formules,

$$G = 0{,}2460576\left(\frac{a\,c}{\tang c} + \tfrac{1}{2}c^2\right) \ldots (G), \quad F = \frac{3a^2 - c^2 \tang^2 c}{6} \ldots\ldots (F)$$

$$\tfrac{1}{2}(e+h)\,\varepsilon^2 + a^2\,\varepsilon + \tfrac{1}{2}a^2\,c = (e+h)\,I \ldots\ldots (\mu);$$

ainsi G augmente et F diminue à mesure que, toutes choses d'ailleurs égales, c devient plus grand, et il vient $F = 0$, lorsque $c = \frac{a\sqrt{3}}{\tang c}$.

On s'assurera d'ailleurs si la demi-voûte glissera ou non sur la base de son pied-droit, en comparant son poids multiplié par $\tang \theta$, avec la valeur de la force I.

Des voûtes sphériques ou en dôme.

73. Une voûte en dôme, à base circulaire, est engendrée par la révolution d'un profil tel que $a\,c'e\,f$ autour d'un axe vertical $o\,c$. Dans ce mouvement les points m, n .... décrivent des cercles horizon-taux dont les centres sont dans l'axe, et les lignes $m\,n$, $r\,s$ ..... engendrent des joints coniques qui ont pour sommet commun le point o et qui divisent la voûte en assises lesquelles sont elles-mêmes divi-sées en voussoirs par des plans méridiens, c'est-à-dire, par le profil générateur, considéré dans différentes positions.

Manière d'en établir la stabilité.

74. Pour établir la stabilité d'une voûte de ce genre, on suppose cette voûte partagée par des plans méridiens, en un nombre pair de demi-fuseaux égaux, opposés deux à deux et agissant l'un contre l'autre par l'arête commune $c'c$; de sorte qu'on n'a plus qu'à considérer séparément deux de ces fuseaux opposés et les parties correspondantes du tambour ou pied-droit cylindrique, comprises entre les mêmes plans méridiens. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par l'observa-tion qui apprend qu'une voûte en dôme qui manque de stabilité, se lézarde et tend à se rompre suivant des plans méridiens.

Le nombre des plans de division qu'on emploie, dépend des dimen-sions des voussoirs, du mode de construction, mais surtout du nom-bre de parties faibles que présente le pied-droit: par exemple, si les assises de la voûte étaient reliées entre elles par des barres, des goujons de fer, ou par tout autre moyen, il est évident qu'il n'exis-terait plus de poussée; si le pied-droit devait être percé sur son

pourtour, les plans méridiens seraient en même nombre que les ouvertures et passeraient par leurs milieux.

En général, le glissement sur les joints, de dehors en dedans de la voûte, est impossible et dans le sens contraire, il ne peut avoir lieu, comme on le sait, que sur le joint de naissance.

Voûte sphérique, extradossée parallèlement; formules.

figure 20e.

75. Nous nous bornerons à la voûte sphérique, extradossée parallèlement. Il est clair que les centres de gravité du demi-fuseau et de ses parties déterminées par les joints coniques, sont dans le plan méridien a d, moyen entre les méridiens o f, o f' qui comprennent le fuseau. Soit 2β l'angle $f o f'$ ou l'arc qui le mesure dans le cercle dont le rayon est 1. Pendant que le profil a c' c f, générateur de la voûte, tourne de la quantité infiniment petite $d\beta$, l'élément de surface m r s n, engendre un élément de volume $d^2 p$, égal à la différence des deux pyramides sphériques dont les bases sont les élémens de zône, décrits par m r et n s. Or, l'élément de zône a pour mesure, la hauteur de la zône, multipliée par l'arc de grand cercle qui répond à l'angle $d\beta$; mais à cause de l'égalité des angles m r x, m o m', cette hauteur est $r \sin\alpha\, d\alpha$, sur la sphère du rayon r et de même $R \sin\alpha\, d\alpha$, sur la sphère du rayon R; donc . . . . . $d^2 p = \frac{1}{3}(R^3 - r^3) \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$. De là résultent les expressions des volumes dp, p engendrés par les surfaces m r s n, c' m n c, parcourant l'arc fini 2β; savoir $dp = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\beta \sin\alpha\, d\alpha$ et

$$p = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1 - \cos\alpha)\beta \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Cela posé, la distance δ du centre de gravité du volume élémentaire $d^2 p$, au centre o, s'obtiendra en divisant par ce volume la différence des momens des deux pyramides, pris par rapport à ce même centre, et parce que le centre de gravité d'une pyramide est aux $\frac{3}{4}$ de sa hauteur à partir du sommet, on aura $\delta = \dfrac{3(R^4 - r^4)}{4(R^3 - r^3)}$. Pour rapporter les centres de gravité et les momens à l'axe oc, observons que les centres de gravité des deux pyramides et de l'élément $d^2 p$ qui en est la différence, sont sur une même droite avec le point o, et que comme la dimension m r est infiniment petite, cette droite fait avec l'axe oc un angle qui ne diffère de l'angle α que d'une quantité infiniment petite aussi; donc la distance du centre de gravité de l'élément $d^2 p$ est simplement $\delta \sin\alpha$, expression indépendante de β; d'où il suit que les centres de gravité de tous les élémens égaux à $d^2 p$ qui composent le

solide dp, sont sur un arc de cercle horizontal dont le centre est dans l'axe oc, dont le rayon est $\delta \sin \alpha$ et la longueur $2\beta\delta \sin \alpha$; par conséquent, la distance du centre de gravité du solide dp, est $\frac{\delta \sin \alpha \sin \beta}{\beta}$ et son moment $dm = \frac{1}{2}(R^4 - r^4) \sin \beta \sin^2 \alpha \, d\alpha$.

En intégrant on trouve

$$m = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \sin \beta \ldots \ldots (2).$$

C'est le moment du solide p relativement à l'axe oc; de sorte que la distance D du centre de gravité de ce solide au même axe est donnée par l'équation $D = \frac{m}{p}$.

Maintenant les distances oK, ol de l'axe oc à la corde de l'arc décrit par le point m et à la tangente au milieu de l'arc engendré par le point n, sont $r \sin \alpha \cos \beta$ et $R \sin \alpha$; donc $x = r \sin \alpha \cos \beta - D$, pour le premier point, $x = R \sin \alpha - D$, pour le second point; et comme on a toujours $y = R - r \cos \alpha$ et $y = R(1 - \cos \alpha)$ ou $y = r(1 - \cos \alpha)$ et $y = r - R \cos \alpha$, respectivement pour les deux points, selon que la force φ est appliquée en c ou en c'; on aura ici, en fesant, pour abreger, ...
$\frac{R}{r} = K$, $\frac{2}{3} r^4 (K^3 - 1) \beta \sin \beta = A$, $\frac{1}{4} r^4 (K^4 - 1) \sin \beta = B$, $\frac{2}{3} r^4 K (K^3 - 1) \beta = A'$ et, pour un moment, $A \sin \alpha - B\alpha - (A - B) \sin \alpha \cos \alpha = N$, $A' \sin \alpha - B\alpha -$ . . . . . $(A' - B) \sin \alpha \cos \alpha = N'$,

$$\varphi = \frac{N}{r(K - \cos \alpha)} \ldots (3), \quad \varphi = \frac{N'}{Kr(1 - \cos \alpha)} \ldots (4)$$

ou

$$\varphi = \frac{N}{r(1 - \cos \alpha)} \ldots (5), \quad \varphi = \frac{N}{r(1 - K \cos \alpha)} \ldots (6).$$

D'abord, égalons à zéro la différentielle de (3) relative à α, nous trouverons $(K - \cos \alpha)[2(A - B) \sin^2 \alpha - A(1 - \cos \alpha)] - A \sin^2 \alpha + B\alpha \sin \alpha + (A - B) \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0$ ou, en développant et réduisant, $2(A - B) K \sin^2 \alpha - A(K + 1)(1 - \cos \alpha) +$ . . . . . $B\alpha \sin \alpha - (A - B) \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0$, et en divisant par $(A - B) \sin^2 \alpha$,

$$\left. \begin{aligned} 2K &= (K+1) \frac{A}{A-B} \frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} - \frac{B}{A-B} \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \ldots \\ \text{puis,} \quad F &= \frac{2(A-B) \sin \alpha - A \tan \frac{1}{2}\alpha}{r} \ldots \ldots \end{aligned} \right\} (F)$$

supposé qu'on prenne pour la valeur de F le rapport des différentielles du numérateur et du dénominateur de (3). Ensuite, les mêmes opérations répétées sur l'expression (4) produiront les formules,

$$\left. \begin{aligned} 2 &= \frac{A'}{A'-B} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} - \frac{B}{A'-B} \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \\ F' &= \frac{2(A'-B) \sin \alpha - A' \tan \frac{1}{2}\alpha}{rK} \ldots \ldots \end{aligned} \right\} (f)$$

dont chacune ne diffère de son analogue (F) que par le changement de A et r en A' et R.

De ces résultats, on déduit immédiatement ceux qui se rapportent aux expressions (5), (6) et qui détermineraient F', f': pour la première (5), on changera A' en A et R en r, dans les formules (f); pour la seconde (6), il suffira de mettre r à la place de R et réciproquement, dans les formules (F); on peut donc se dispenser d'écrire ces autres formules.

Pour former l'équation (n), on fera d'abord $\lambda = \frac{\pi}{2}$ dans (1) et (2), ce qui donnera le demi-fuseau et son moment par rapport à la verticale oc et le quotient de cette dernière quantité divisée par l'autre, sera la distance du centre de gravité du fuseau à la même verticale. Si donc ε et h sont l'épaisseur et la hauteur du pied-droit cylindrique, en retranchant cette distance, de $r+\varepsilon$ et multipliant le reste, par le fuseau on aura le moment. . . . . .
$\left(r+\varepsilon-\frac{3}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}\right)\times\frac{2}{3}(R^3-r^3)$, par rapport au point d, ou ce qui revient au même, par rapport à la tangente au milieu de l'arc extérieur de la base du pied-droit; ensuite, le volume du pied-droit sera $h\beta\left[(r+\varepsilon)^2-r^2\right]$ et son moment relativement à cette tangente, $\left[r+\varepsilon-\frac{2}{3}\frac{(r+\varepsilon)^3-r^3}{(r+\varepsilon)^2-r^2}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}\right]\left[(r+\varepsilon)^2-r^2\right]h\beta$; ainsi la quantité $r+\varepsilon=z$, prise pour inconnue, dépendra de l'équation du troisième degré,

$$h\left(\beta-\tfrac{2}{3}\sin\beta\right)z^3-\beta\left[hr^2-\tfrac{2}{3}(R^3-r^3)\right]z+\left[\tfrac{2}{3}hr^3-\tfrac{\pi}{8}(R^4-r^4)\right]\sin\beta=HL\,.\,.\,(n).$$

Des voûtes d'arête et en arc de cloître.

figure 21.e

96. Considérons deux demi-cylindres à bases circulaires, de rayons égaux et dont les axes XX, YY compris dans un même plan horizontal, sont perpendiculaires entre eux. Les surfaces de ces cylindres se couperont en deux ellipses égales, situées dans les plans verticaux AOA', AOA', et qui partageront ces surfaces en huit nappes; quatre intérieures, égales entre elles, limitées de part et d'autre aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte en arc de cloître, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes rentrantes; quatre extérieures, pareillement égales entre elles, limitées, d'une part, aux cercles verticaux AA, AA', A'A', A'A, d'autre part, aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte d'arête, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes saillantes. C'est de ces voûtes, les plus simples de leurs espèces, et auxquelles nous supposerons une épaisseur constante, que nous allons maintenant nous occuper.

Voûte en arc de cloître, d'égale épaisseur; formules.

77. Pour concevoir l'équilibre de la voûte en arc de cloître, je la regarde comme décomposée en quatre parties indépendantes, telles que OFF', par les plans verticaux des ellipses. Le joint verti-cal se réduira ici à une droite que j'appellerai l'axe de la clef; deux parties opposées OFF', OGG' de la voûte, agiront l'une sur l'autre en se poussant par cet axe.

Il est évident que les centres de gravité du quart de voûte, OGG' et de ses parties déterminées par les plans de joint mn, rs &c. se trouvent dans le plan vertical OX; or, l'élément de volume, dp, projeté verticalement en $mrsn$ et horizontalement en $MRR'M'N'S'SN$, est la différence de deux pyramides qui ont pour sommet commun le point O et pour bases, les surfaces élémentaires, projetées l'une en mr et $MRR'M'$, l'autre en ns et $NSS'N'$, et dont chacune équivaut à sa projection horizontale, multipliée par $\cos\alpha$. Mais $UV = r\omega = r\cos\alpha\, d\alpha$; $MM' = 2OU = 2r\sin\alpha$; donc la première surface élémentaire et semblablement la seconde, sont exprimées par

$$2r^2 \sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha \;\ldots\ldots (1),\quad 2R^2\sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha \;\ldots\ldots (2);$$

ainsi, on a $dp = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$, et en prenant l'intégrale de-puis $\alpha = 0$,

$$p = \frac{2}{9}(R^3 - r^3)(1 - \cos^3\alpha) \;\ldots\ldots (3),$$

c'est la mesure du solide $OSSN'N$.

Le raisonnement qu'on a fait dans le cas de la voûte sphérique s'applique ici et l'on trouve pour la distance du centre de gravité de dp, au point O, la même expression $\frac{3(R^4 - r^4)}{4(R^3 - r^3)}$ que pour celle du so-lide d^2p considéré dans le premier cas, expression qui multipliée aussi par $\sin\alpha$ donnera la distance au plan vertical YY; en sorte qu'on aura $dm = \frac{1}{2}(R^4 - r^4)\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$, dont l'intégrale, prise depuis $\alpha = 0$, sera

$$m = \frac{1}{64}(R^4 - r^4)\left(\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha\right) \;\ldots\ldots (4)$$

c'est le moment du solide p par rapport à ce plan YY: de là

$$d = \frac{m}{p} = \frac{9(R^4 - r^4)\left(\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha\right)}{32(R^3 - r^3)(1 - \cos^3\alpha)} \;\ldots\ldots (5)$$

distance du centre de gravité de p au même plan. Mais $x = r\sin\alpha - d$, pour le point m et $x = R\sin\alpha - d$, pour le point n; donc on a respec-tivement,

$$px = r^4\sin\alpha\left[\frac{2}{9}(K^3 - 1)(1 - \cos^3\alpha) - \frac{1}{16}(K^4 - 1)\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}\right)\right],$$

$$px = r^4\sin\alpha\left[\frac{2}{9}K(K^3 - 1)(1 - \cos^3\alpha) - \frac{1}{16}(K^4 - 1)\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}\right)\right];$$

et comme on a encore $y=R-r\cos\alpha$ et $y=R(1-\cos\alpha)$ ou $y=r(1-\cos\alpha)$ et $y=r-R\cos\alpha$, respectivement pour les deux points et selon que la force φ réside en c ou en c', il viendra les formules

$$\frac{2r^3(K^3-1)(1-\cos^3\alpha)}{9\,\mathrm{tang}\,(\theta+\alpha)} \ldots\ldots (G),$$

$$\varphi=\frac{px}{r(K-\cos\alpha)} \ldots\ldots (F), \qquad \varphi=\frac{px}{rK(1-\cos\alpha)} \ldots (f);$$

$$\varphi=\frac{px}{r(1-\cos\alpha)} \ldots\ldots (F'), \qquad \varphi=\frac{px}{r(1-K\cos\alpha)} \ldots (f').$$

Au moyen des expressions (3) et (5) dans lesquelles on fera $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et on observant que $CC'=2(r+\varepsilon)$ on trouvera pour déterminer l'épaisseur du pied-droit; l'équation

$$h\varepsilon^3+hr\varepsilon^2+\frac{2}{9}(R^3-r^3)\,\varepsilon+\frac{2}{9}\,r(R^3-r^3)-\frac{1}{32}\pi(R^4-r^4)=HL \ldots (n).$$

Voûte d'arête d'égale épaisseur; formules.

78. On concevra l'équilibre de la voûte, en la considérant comme décomposée en huit parties indépendantes, telles que OF'Y, OF'X &c.ª par les plans verticaux XX, YY des axes et ceux AOA', AOA' des ellipses. Chaque double partie OXF'Y et les deux parties collatérales OG'Y, OFX se pousseront mutuellement par les joints verticaux que les plans des axes déterminent. Le pilier A'B'D'E' qui soutient cette double partie supportera en même tems les poussées des deux parties collatérales; de sorte que la résultante de ces poussées, égales entre elles et disposées symétriquement par rapport à lui, se trouvera dans le plan OD' et tendrait à faire tourner ce pilier autour du point D' de sa base; mais, comme la pierre se briserait en ce point, il vaudra mieux établir l'équilibre du pilier, en le regardant comme mobile autour de l'arête E'D' et simplement comme chargé de la partie OF'Y et poussé par la partie opposée OG'Y; il acquerra ainsi une plus forte épaisseur. En effet soit P le poids d'une partie OF'Y, D la distance de son centre de gravité au plan vertical A'B' de la naissance; la condition de l'équilibre de rotation autour de l'arête E'D' sera exprimée par l'équation $\frac{1}{2}h\varepsilon^3+P(\varepsilon+D)=HL$. On peut donner à cette équation la forme $\frac{1}{\sqrt{2}}h\varepsilon^3+2P\left[\frac{1}{2}(\varepsilon+D)\sqrt{2}\right]=HL\sqrt{2}$, sous laquelle elle exprimerait la condition de l'équilibre de rotation autour du point D', entre le pilier et les deux parties OF'Y, OFX, si les centres de gravité de ces parties étaient dans les plans F'G', F'F; mais, il est évident que ces centres tomberont dans les angles OF'Y, OF'X; par conséquent la distance de la résultante 2P des poids des deux parties, au point D', surpassera $(\varepsilon+D)\sqrt{2}$; d'où il suit que

la valeur de ε sera moindre dans l'hypothèse de la rotation autour du point D'.

Cela posé, le solide OYN'NMM', que nous avons à considérer, est la différence entre le solide total $OYNQPM' = \frac{1}{2}(R^2-r^2)R\alpha$ et le solide partiel $ONQPM = ONTUM = \frac{1}{3}(R^3-r^3)(1-\cos^2\alpha)$; les distances des centres de gravité de ces derniers solides au plan vertical YY sont $\frac{4(R^3-r^3)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3(R^2-r^2)\alpha}$ et $\frac{9(R^4-r^4)(\alpha-\frac{1}{4}\sin 4\alpha)}{32(R^3-r^3)(1-\cos^3\alpha)}$, la même précisément que pour le solide double OMM'R'R; d'où l'on conclut les expressions

$$p=\frac{1}{2}(R^2-r^2)R\alpha-\frac{1}{3}(R^3-r^3)(1-\cos^3\alpha),\quad d=\frac{\frac{2}{3}(R^3-r^3)R\sin^2\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{32}(R^4-r^4)(\alpha-\frac{1}{4}\sin 4\alpha)}{p},$$

au moyen desquelles on trouvera sans peine les formules (G), (F), (f) et (F'), (f') ainsi que l'équation (n).

Aires et volumes des deux voûtes.

79. L'expression (1) intégrée depuis $\alpha=0$, jusqu'à $\alpha=90°$, donne $2r^2$ dont le quadruple $8r^2$ exprime l'aire de la voûte en arc de cloître; c'est le double de la surface du carré AA'A'A.

L'intégrale précédente, multipliée par $\frac{1}{3}r$ exprimera le volume intérieur de la voûte, lequel est par conséquent les deux tiers de celui du prisme circonscrit.

Quant à la voûte d'arête, on en obtiendra l'aire ou le volume, en retranchant de la somme des aires ou des volumes des deux demi-cylindres, l'aire ou le volume de la voûte en arc de cloître.

Détermination de l'épaisseur à la clef d'une voûte.

80. Une condition essentielle à la solidité d'une voûte, c'est que la pierre dont elle est construite ait une dureté suffisante pour résister à la pression qu'elle éprouve. Nous avons vu (n°. 51) comment on évalue la pression exercée sur les joints d'une voûte; en la divisant par la surface du joint, on aura la pression qui répond à l'unité de surface et l'on pourra juger par-là si l'espèce de pierre employée est capable de résister; sur quoi l'on observera que, d'après l'exemple des constructions, la pierre ne doit pas être soumise à une pression plus grande que $\frac{1}{10}$ du poids sous lequel elle s'écrase dans les expériences, encore cette pression serait-elle souvent trop forte, parce qu'il faut parer aux imperfections inévitables dans l'exécution des voussoirs, aux défauts de la pose et aux altérations que le temps fait éprouver aux matériaux.

La dureté de la pierre, la figure de la voûte, son ouverture, sa montée et son épaisseur sont des choses qui dépendent les unes des

autres. En supposant une dureté moyenne, Perronnet a donné pour trouver l'épaisseur des pleins cintres à extrados horizontal, une règle fondée sur l'observation: prendre $\frac{1}{24}$ de l'ouverture, y ajouter $1^{p.}$ et de la somme retrancher 1^{li} par pied de l'ouverture. Cette règle est exprimée par la formule,

$$e = \frac{5D + 46,^{m}777}{144} \; \ldots \ldots \; (E),$$

dans laquelle e désigne l'épaisseur et D le diamètre. Elle s'appliquera aux anses de panier pourvu qu'on prenne au lieu de D le double du rayon de l'arc du sommet. Mais comme elle donne des épaisseurs trop fortes, dès que l'ouverture excède $30^{m.}$, il faudra, au-delà de ce terme, ainsi qu'à l'égard des autres genres de voûtes, se conformer à la pratique des constructeurs.

Recherche du moment de stabilité.

81. L'épaisseur que la théorie assigne aux pieds-droits d'une voûte, pour satisfaire à la condition de l'équilibre strict, serait très-insuffisante dans la pratique: les pierres ne sont pas assez dures pour pouvoir s'appuyer sur leurs arêtes, sans éclater; la cohésion de la maçonnerie n'est pas telle qu'un pied-droit puisse se soulever tout d'une pièce en tournant autour de l'arête extérieure de sa base; il s'en faut bien que le sol de sa fondation soit parfaitement homogène et incompressible, et à ces circonstances se joignent encore une foule de causes accidentelles de destruction; il est donc absolument nécessaire d'augmenter l'épaisseur donnée par la théorie et le principe d'après lequel il paraît naturel de régler cette augmentation, c'est que le surcroît du moment de la résistance soit proportionnel au moment de la puissance. Ce surcroît qu'on peut appeler le moment de stabilité de la voûte se déterminera d'ailleurs par l'expérience, en appliquant la théorie à des voûtes exécutées et dont la solidité ait été éprouvée par le tems.

Or la théorie de Lahire ayant été adoptée dès longtemps par la plupart des constructeurs et même appliquée aux voûtes surbaissées, moyennant quelques modifications; nous pouvons en prendre les résultats pour termes de comparaison.

figure 22.e

Désignons par a l'angle que le joint de rupture, dans l'hypothèse de Lahire, fait avec la verticale; par m, n les distances horizontale et verticale de son intrados à l'arête extérieure de la base du pied-droit; par p le poids de la demi-partie supérieure de la voûte, par x la distance horizontale du centre de gravité de cette demi-partie à l'intrados du joint de rupture; par q le poids de la partie inférieure et du pied-droit; enfin par X la distance horizontale de leur centre de gravité à l'arête extérieure:

On décomposera le poids $2p$ en deux forces $\frac{p}{\sin a}$ perpendiculaires aux joints de rupture et dirigées à leurs intrados; le moment de la force $\frac{p}{\sin a}$, appliquée en m, par rapport à l'arête extérieure a, sera égal à la différence des momens de ses composantes horizontale et verticale; écrivant donc $m+x-x$, au lieu de m, et, représentant par M le moment total $p(m+x)+qX$, on trouvera cette équation d'équilibre,

$$M = px + \frac{np}{\tang a} \quad \ldots\ldots \quad (H)$$

tandis que selon notre théorie, on a

$$M = HF \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

F étant le maximum de $\frac{px}{y}$.

Pleins cintres à extrados horizontal;

82. Appliquons ces équations d'abord au plein cintre à extrados horizontal; pour cela, nous remarquerons que Lahire suppose le joint de rupture prolongé jusqu'à cet extrados de sorte qu'avec $a=45°$, et $n=h+r\cos a$, il a . . . .

$$p=\tfrac{1}{2}R^2\tang a - \tfrac{1}{2}r^2 a;\ px=\tfrac{1}{2}r^3\sin^2 a\left[\frac{h^2}{\cos a}\left(1-\frac{h}{3\cos a}\right)+\frac{1}{3\cos^2\frac{1}{2}a}-\frac{a}{\sin a}\right].$$

Le tableau suivant présente les résultats relatifs à différentes hypothèses.

hypothèses	Résultats de l'équations.		Rapports des deux sortes de résultats.
	(H)	(m)	
$r=6^m$; $R=7$; $h=2$	72, 5782	39, 9582	1, 8162
" " $h=4$	93, 3042	48, 8378	1, 9104
$r=10$; $R=11$; $h=2$	227, 4942	133, 6107	1, 7026
" " $h=4$	269, 9542	154, 1663	1, 7510

On voit que la méthode de Lahire donne un moment de stabilité, pour la même voûte, d'autant plus grand que les pieds-droits sont plus élevés et pour la même hauteur de pieds-droits, d'autant moindre que la voûte est plus grande.

Voûtes surbaissées, à extrados horizontal;

83. Considérons maintenant l'anse de panier à trois centres et pour ce genre de voûte modifions la règle de Lahire, à la manière des Ingénieurs qui placent le joint de rupture au point de raccordement des arcs du sommet et de la naissance. Supposons la voûte surbaissée au tiers et extradossée horizontalement, il n'y aura qu'à faire $a=30°$ dans la formule (H) et l'on aura pour différentes hypothèses les résultats suivans;

Table,

hypothèses.	Résultats de l'équation. (H)	Résultats de l'équation. (n)	Rapports des deux sortes de résultats.
$a=6^m; e=1^m; h=2$	72, 4859	40, 1933	1, 8034
" " $h=4$	98, 0435	51, 6771	1, 8972
$a=10; e=1; h=2$	200, 6315	126, 5250	1, 5857
" " $h=2$	250, 3968	152, 7026	1, 6397

Même conclusion que précédemment et cette autre que le moment de stabilité produit par la méthode de Lahire est moindre pour la voûte surbaissée que pour le plein cintre et d'autant moindre que la voûte a plus d'ouverture, défaut qui eût été plus sensible, sans la modification apportée à la méthode

Valeur du coëfficient de stabilité pour toutes les voûtes en plein cintre et pour les voûtes surbaissées au quart et extradossées horizontalement.

84. Afin de corriger ces irrégularités, nous attribuerons à toutes les voûtes en plein cintre, surbaissées, et extradossées horizontalement le même moment de stabilité et nous adopterons le rapport 1,9 provenant des voûtes de moyenne grandeur; en sorte que la valeur de la poussée, tirée de nos formules, devra être multipliée par ce nombre avant d'être introduite dans l'équation d'équilibre.

Le même coëfficient 1,9 paraît convenir aussi pour les voûtes surbaissées au quart et extradossées de niveau.

Pleins cintres extradossés en chape; magasins à poudre, théorie des contre-forts; valeur du coëfficient de stabilité.

85. Nous déterminerons le moment de stabilité des pleins cintres extradossés en chape, en les comparant aux magasins à poudre de Vauban. Cet Ingénieur donne à ses magasins, pour une ouverture de 25^{pi}, des pieds-droits de 8^{pi} d'épaisseur sous 8 de hauteur; il les fortifie par des contre-forts espacés de 12^{pi}, ayant aussi 8^{pi} de hauteur, 6 de largeur et seulement 4 de queue; il élève le sommet extérieur de la chape à 8^{pi} au-dessus de l'intrados, et parce que l'épaisseur aux reins est de 3^{pi} il en résulte $B=20^{pi}\frac{1}{2}$, $I=49°, 7', 17''$.

Soit donc $\varepsilon=2^m,5987$; le premier membre de notre équation d'équilibre $M=HF$, donnera $M=49,7484$ pour le moment de la résistance de la demi-chape et du pied-droit sans contre-forts. Maintenant comme le frottement empêche le glissement sur la fondation, il s'ensuit que le pied-droit ne pourra céder que par un mouvement de rotation et en entraînant les contre-forts dont il se séparera (fig. 23) selon son parement extérieur, ou bien sans entraîner les contre-forts dont il se séparera alors latéralement (fig. 24).

figure 23.e

86. Dans le premier mode de rupture, la résistance des contre-forts proviendra de quatre forces; la cohésion sur la ligne ce, la cohésion sur la ligne cd, le frottement au point d de la même ligne, le poids du contre-fort tournant autour du point c. On néglige la cohésion sur bc laquelle serait fonction de ε.

Soit a la longueur totale du magasin, n le nombre des contre-forts; h, l, q leur hauteur, leur largeur et leur queue; γ la cohésion sur l'unité de surface de maçonnerie, δ le poids de l'unité de volume: les moments des quatre forces par rapport à c seront; pour un seul contre-fort, $\frac{1}{2}lq^2\gamma$, $hlq\gamma$, $\frac{1}{2}lq^3\delta \operatorname{tang}\theta$, $\frac{1}{2}hlq^2\delta$; la somme multipliée par n et ajoutée à $a\delta M$, sera le moment total du pied-droit et des contre-forts. Si l'on divise le résultat par a, afin de le rapporter à l'unité de longueur et par δ, afin de le rendre comparable à la valeur de M, déjà calculée, il viendra

$$M+\frac{lnq}{2a}\left[(q+2h)\frac{\gamma}{\delta}+q(q\operatorname{tang}\theta+h)\right]\ldots\ldots(1).$$

Or, on a, pour le magasin de Vauban, $M=49,7484$; $h=2^m,5987$; $l=1,9490$; $q=1,2994$; $n=4$; $a=19,49$ et si l'on prend $\delta=2000$ k^g; $\gamma=6000$ k^g, $\operatorname{tang}\theta=0,76$, la valeur de l'expression (1) sera 56,013; mais suivant notre théorie le moment HF de la poussée est 28,1698; on a donc le rapport 1,9884 par lequel il faudra multiplier la poussée pour avoir un pied-droit simple de même stabilité que celui de Vauban, avec ses contre-forts; dans l'exemple, l'épaisseur de ce pied-droit simple serait $\varepsilon=3^m,0$ environ.

Le rapport trouvé 2 pourra être appliqué à toute grandeur de magasins.

figure 24e

Dans le second mode de rupture, si l'on suppose la cohésion sur la section abcd du pied-droit, réunie au centre de figure de cette section, son moment par rapport à c sera $\frac{1}{2}h\varepsilon\gamma\sqrt{h^2+\varepsilon^2}$. En divisant le double de ce moment par δ et par la longueur a' du pied-droit, comprise entre deux contre-forts et ajoutant au résultat la quantité M, on aura pour le moment total de la résistance sur l'unité de longueur, l'expression

$$M+\frac{h\varepsilon\gamma}{a\delta}\sqrt{h^2+\varepsilon^2}\ldots\ldots(2)$$

qui appliquée au magasin de Vauban donne une valeur plus grande que la précédente, quoiqu'on ait supposé la cohésion réunie au centre de gravité de la section; c'était donc par la première expression que devait être évaluée la résistance du pied-droit et des contre-forts.

Comparaison du pied-droit simple, avec le pied-droit muni de contre-forts.

88. Il est remarquable que l'excès d'épaisseur du pied-droit simple de même stabilité que le pied-droit muni de contre-forts, n'étant que de 1pi, ce qui produit sur les 60pi de longueur du magasin 480 pieds cubes de maçonnerie, tandis que le volume des quatre contre-forts est de 768 pieds cubes, il y aurait une économie réelle à supprimer les contre-forts.

Détermination de l'épaisseur d'un pied-droit muni de contre-forts.

89. Au moyen des expressions (1) et (2) on résout cette question : connaissant l'espacement et les dimensions des contre-forts qu'on se propose d'ajouter à un mur, déterminer l'épaisseur que ce mur doit avoir pour résister, conjointement avec les contre-forts, à la poussée qui agit contre lui.

Soit toujours F la poussée horizontale et H son bras de levier : on peut regarder cette poussée comme composée de deux parties ; l'une C opposée à la résistance des contre-forts, l'autre $F-C$ opposée à la résistance du mur. Or, si m et M représentent les moments de ces résistances, on aura $C=\frac{m}{H}$, $F-C=\frac{M}{H}$ et par conséquent

$$M+m=FH\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

équation dont le premier membre n'est autre chose que l'expression (1) ou (2) et qui donnera la valeur cherchée, soit que les contre-forts se renversent soit qu'ils demeurent immobiles ; dans l'un de ces cas m sera donné immédiatement ; dans l'autre il sera fonction de l'épaisseur demandée.

Rapport entre le diamètre et l'épaisseur aux reins des magasins à l'épreuve de la bombe.

90. Avec l'épaisseur de 3pi aux reins de la voûte, le magasin de Vauban est à l'épreuve de la bombe, ainsi que l'expérience le constate ; mais cette épaisseur doit augmenter en même temps que les dimensions du magasin. Or, selon la théorie physico-mathématique de la percussion, l'effet d'un choc pouvant être comparé à celui d'une pression ou d'un poids, on pourra, au défaut de méthode plus exacte, régler l'augmentation d'après les principes sur la résistance des corps à la rupture, comme s'il s'agissait de pièces continues, posées sur des appuis fixes et chargées de poids égaux ; en sorte que les épaisseurs seront proportionnelles aux racines carrées des ouvertures. Mais il sera bon de vérifier si la différence $f-F$ ou $f'-F'$ est au moins égale à celle qui résulte du magasin de Vauban.

Du coefficient de stabilité pour les autres genres de voûtes.

91. Quant aux voûtes des autres genres on en déterminerait le coefficient de stabilité par le même procédé ; mais comme la plupart n'ont qu'une stabilité factice, obtenue par des artifices particuliers, il est difficile d'en trouver qui puissent servir de termes de comparaison. (*)

(*) Cette discussion, à quelques changements près, est extraite du Mémorial (No. 4, pages 77 et suivantes).

De la largeur des fondations

92. Ce que nous avons dit de la largeur des fondations à l'occasion des murs de revêtement, s'appliquera ici, en remplaçant la poussée des terres par la poussée de la voûte.

Observation sur l'application des formules; Table auxiliaire.

93. J'ai établi les formules par un procédé simple et uniforme en n'employant d'autres principes que ceux des centres de gravité de l'arc de cercle et de la pyramide et j'ai cherché à donner aux expressions analytiques les formes les plus commodes pour l'application. Il faut avouer néanmoins que cette application ne laisse pas d'exiger encore des calculs assez pénibles; on les abrégerait beaucoup au moyen d'une table des valeurs de la fonction $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ qui se reproduit dans la plupart des formules; c'est pourquoi j'ai calculé ces valeurs et leurs logarithmes dont j'insère la table ici.

Table destinée à faciliter les applications des formules.

94. Table des valeurs de la fonction $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ et de leurs Logarithmes.

α	$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$	Logarithmes	α	$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$	Logarithmes	α	$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$	Logarithmes
0	1,00000	0,0000000	36	1,06896	0,0289612	56	1,17894	0,0714912
5	1,00121	0,0005514	37	1,07304	0,0306161	57	1,18621	0,0741609
10	1,00510	0,0022072	38	1,07726	0,0323190	58	1,20133	0,0796638
15	1,01151	0,0049725	39	1,08161	0,0340702	59	1,19367	0,0768849
20	1,02060	0,0088557	40	1,08610	0,0358699	60	1,20920	0,0824981
21	1,02275	0,0097675	41	1,09073	0,0377184	61	1,21727	0,0853879
22	1,02500	0,0107247	42	1,09551	0,0396158	62	1,22556	0,0883342
23	1,02737	0,0117272	43	1,10043	0,0415626	63	1,23406	0,0913370
24	1,02985	0,0127753	44	1,10550	0,0435588	64	1,24279	0,0943972
25	1,03243	0,0138691	45	1,11072	0,0456049	65	1,25174	0,0975151
26	1,03516	0,0150087	46	1,11609	0,0477011	66	1,26093	0,1006911
27	1,03799	0,0161944	47	1,12163	0,0498478	67	1,27036	0,1039261
28	1,04084	0,0174261	48	1,12731	0,0520451	68	1,28003	0,1072204
29	1,04401	0,0187042	49	1,13316	0,0542936	69	1,28996	0,1105748
30	1,04720	0,0200287	50	1,13918	0,0565934	70	1,30014	0,1139896
31	1,05099	0,0215998	51	1,14537	0,0589450	71	1,31059	0,1174657
32	1,05395	0,0226182	52	1,15172	0,0613486	75	1,35517	0,1319949
33	1,05750	0,0242825	53	1,15826	0,0638047	80	1,41780	0,1516159
34	1,06119	0,0257946	54	1,16497	0,0663136	85	1,48920	0,1729521
35	1,06501	0,0273541	55	1,17186	0,0688756	90	1,57079	0,1961199

35 Les constructions géométriques pourraient aussi fournir des moyens d'abréviation et l'on a déjà fait quelques tentatives à cet égard; MM. Lamé et Clapeyron ont démontré (Annales des mines, tome 8, page 813) qu'en général, si l'on suppose le joint de rupture vertical, sa position est telle que la tangente au point relatif du cintre va couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse qui tend à se détacher; mais cette hypothèse sur la direction du joint de rupture ne paraît pas naturelle.

De la résistance des supports en maçonnerie.

figure 25.

1° Soit ABCD une pile ou un pilier en maçonnerie, sollicité par son propre poids et par un poids étranger p.

Désignons par h la hauteur AD, par ε l'épaisseur AB=CD, par f le rapport du frottement à la pression, par δ la densité de la maçonnerie, par θ l'angle BAS qu'une section AS fait avec l'horizon et par α l'action qui s'exerce parallèlement à cette section; on trouvera sans difficulté. . . . .

$$\alpha=(p+\delta\varepsilon h-\tfrac{1}{2}\delta\varepsilon^2\tang\theta)\sin\theta-(p+\delta\varepsilon h-\tfrac{1}{2}\delta\varepsilon^2\tang\theta)f\cos\theta-\frac{\gamma\varepsilon}{\cos\theta},$$

expression qui prend la forme

$$\alpha=\frac{-(p+\delta\varepsilon h)f-\gamma\varepsilon+(p+\delta\varepsilon h+\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2 f)\tang\theta-(\gamma\varepsilon+\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2)\tang^2\theta}{\sqrt{1+\tang^2\theta}}=\frac{N}{D}.$$

Cela posé, pour déterminer l'angle de la section de plus grande action et en même tems pour exprimer que cette plus grande action s'anéantit, on égalera à zéro le numérateur N et sa différentielle prise par rapport à tang θ, ce qui donnera

$$N=0\ldots(1),\ \frac{dN}{d\tang\theta}=p+\delta\varepsilon h+\tfrac{1}{2}\delta\varepsilon^2 f-2(\gamma\varepsilon+\tfrac{1}{2}\delta\varepsilon^2)\tang\theta=0\ \ldots(2).$$

Ces deux équations feront connaître l'angle de rupture et la plus grande ou la plus petite valeur que puisse avoir l'une quelconque des autres quantités qu'elles renferment sans que le massif se rompe.

2. D'abord si l'on considère ε comme inconnue et que pour simplifier on néglige le frottement ou qu'on fasse $f=0$, la comparaison des équations (1) et (2) produira les deux équivalentes

$$(p+\delta\varepsilon h)\tang\theta-2\gamma\varepsilon=0\ldots(3),\quad(\gamma+\tfrac{1}{2}\delta\varepsilon)\tang^2\theta-\gamma=0\ldots(4),$$

et chacune des inconnues ε, tang θ sera donnée par une équation du 3e degré; par exemple, ε pour l'équation

$$2\gamma(2\gamma+\delta\varepsilon)\varepsilon^2=(p+\delta h\varepsilon)^2,$$

qui ordonnée par rapport à ε aurait ses deux derniers termes négatifs et n'a par conséquent qu'une racine réelle positive. Cette racine sera la moindre épaisseur que puisse avoir le massif sous la hauteur h et la charge p, tandis que h serait la plus grande hauteur qu'il pût avoir sous l'épaisseur ε et la charge p.

3. En faisant abstraction du poids de la partie supérieure ADCS, c'est-à-dire, en faisant $\delta=0$, on tire des équations (3) et (4)

$$\varepsilon=\frac{p}{2\gamma},\quad \text{tang}\,\theta=1.$$

4. Supposons $p=0$, nous aurons, par les mêmes équations

$$\varepsilon=\frac{\delta^2h^2-4\gamma^2}{2\gamma\delta},\qquad \text{tang}\,\theta=\frac{2\gamma}{\delta h},$$

Cette valeur de ε sera la moidre épaisseur que puisse avoir le massif pour se soutenir sous son propre poids, ou bien h sera la plus grande hauteur à laquelle il puisse être élevé sur l'épaisseur ε.

5. Prenant ensuite $p+\delta\varepsilon h$ pour inconnue, on obtient $p+\delta\varepsilon h=\varepsilon\left[(2\gamma+\frac{1}{2}\delta\varepsilon)f+\sqrt{2\gamma(2\gamma+\delta\varepsilon)(1+f^2)}\right]$, $\text{tang}\,\theta=f+\sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{2\gamma+\delta\varepsilon}}$. Ce sont la valeur de l'angle de rupture et la plus grande valeur que puisse avoir la quantité $p+\delta\varepsilon h$, sans que le pilier se rompe; d'où résulte la plus grande hauteur qu'on puisse donner à ce pilier ou le plus grand poids dont on puisse le charger.

6. Lorsqu'on néglige le poids de la partie supérieure ou qu'on fait $\delta=0$, ces valeurs deviennent

$$p+\delta\varepsilon h=2\gamma\varepsilon\left(f+\sqrt{1+f^2}\right),\quad \text{tang}\,\theta=f+\sqrt{1+f^2}$$

et quand $f=0$, ou qu'on néglige le frottement,

$$p+\delta\varepsilon h=\varepsilon\sqrt{2\gamma(2\gamma+\delta\varepsilon)},\quad \text{tang}\,\theta=\sqrt{\frac{2\gamma}{2\gamma+\delta\varepsilon}};$$

expressions qui, si l'on fait en outre $\delta=0$, reproduisent

$$\varepsilon=\frac{p}{2\gamma},\qquad \text{tang}\,\theta=1.$$

ces derniers résultats ont été donnés par Coulomb, dans le Mémoire cité.

7. La discussion précédente avait en même tems pour objet de prouver que le signe + du radical est le seul qui convienne à la question matérielle.

8. On n'oubliera pas de prendre pour γ et f les valeurs

propres à la matière du mortier ou de la pierre, selon que le massif sera bâti en petits moëllons ou en pierres un peu grandes.

figure 26. — 9 Maintenant supposons que le massif ABCD, soit de plus sollicité par une force horizontale λ. Cette force tendra à le rompre par glissement et par rotation; mais l'observation apprend qu'en général la rupture s'opère de la seconde manière qu'il suffira par conséquent de considérer.

Soit donc H la hauteur AH, b la distance horizontale BE du centre de gravité de p au point B, μ le moment de rotation autour de l'axe A par lequel passe le plan de rupture AS et γ' la cohésion estimée perpendiculairement à AS, on aura

$$\mu = \lambda H - p(b+\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\delta\varepsilon^2 h + \tfrac{1}{3}\delta\varepsilon^3 \tang\theta - \tfrac{1}{2}\gamma'\varepsilon^2(1+\tang^2\theta) = 0 \ldots (5)$$

$$\frac{d\mu}{d\tang\theta} = \frac{1}{3}\delta\varepsilon^3 - \gamma'\varepsilon^2 \tang\theta = 0 \ldots\ldots (6)$$

et par l'élimination de $\tang\theta$,

$$\lambda H - pb - p\varepsilon - \tfrac{1}{2}(\gamma'+\delta h)\varepsilon^2 + \frac{1}{18}\frac{\delta^2}{\gamma'}\varepsilon^4 = 0 \ldots\ldots (7)$$

équation qui résolue par rapport à ε donnera la moindre épaisseur dont le massif soit susceptible.

10. On voit par l'équation (6) que la valeur de $\tang\theta$ est en raison inverse de la cohésion γ': si l'on trouvait $\theta > BAC$, on prendrait $\theta = BAC$, c'est-à-dire,

$$\tang\theta = \frac{h}{\varepsilon} \ldots\ldots\ldots (8)$$

et l'équation (5) donnerait

$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{3\gamma'+\delta h}\varepsilon - \frac{6(\lambda H - pb - \tfrac{1}{2}\gamma' h^2)}{3\gamma'+\delta h} = 0 \ldots\ldots (9)$$

ou simplement

$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{\delta h}\varepsilon - \frac{6(\lambda H - pb)}{\delta h} = 0 \ldots\ldots\ldots (10)$$

si la cohésion était tout-à-fait nulle.

11. Lorsque la cohésion intrinsèque du massif sera très-grande en comparaison de son adhérence γ'' à la base AB, on aura

$$\tang\theta = 0,\quad \varepsilon^2 + \frac{2p}{\gamma''+\delta h}\varepsilon - \frac{2(\lambda H - pb)}{\gamma''+\delta h} = 0 \ldots\ldots (11)$$

12. Il peut arriver que le poids p ne soit que celui d'une partie CDEH du massif, qui se trouverait au-dessus du point H; alors désignant BC par H et BH par h, on permutera les lettres H, h et l'on fera $p=0$, dans l'expression (5) de laquelle on déduira, au lieu des équations (9), (10), (11), dans les cas de $\tang\theta = \frac{h}{\varepsilon}$, $\gamma'=0$ et

tang $\theta=0$, $\gamma'=\gamma''$ les valeurs

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{3h(2\lambda-\gamma' h)}{3\gamma'+\delta(3H-2h)}},\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{6h\lambda}{\delta(3H-2h)}},\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{2h\lambda}{\gamma''+\delta H}}\ \Bigg\}\ \ldots (12)$$

qu'il est aisé de trouver directement et qui deviennent

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{3H(2\lambda-\gamma' H)}{3\gamma'+\delta H}},\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{6\lambda}{\delta}},\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{2H\lambda}{\gamma''+\delta H}}\ \Bigg\}\ \ldots\ldots (13)$$

quand $h=H$ ou que la force λ est appliquée à l'extrémité C.

13 Ces résultats ne conviennent pas exactement aux murs de revêtement; car, ainsi que nous l'avons déjà fait observer, la poussée des terres est répartie sur l'étendue du parement intérieur et ne peut, quant à la manière d'agir pour rompre le massif, être regardée comme concentrée en un même point.

14. L'équation (11) quand on y fait $\gamma''=0$, $\delta=1$ et $\lambda=L$ revient à l'équation d'équilibre des voûtes, $M=HL$, dans laquelle δ serait facteur de tous les termes. Désignons par a la hauteur constante DH, en sorte que $H=a+h$, par c l'épaisseur CG de la voûte et par ε' l'épaisseur du pied-droit, pour $h=0$, cette équation (11) donnera $\varepsilon'=\frac{La-pb}{p}$ et ensuite

figure 26.e

$$h=\frac{2p(\varepsilon-\varepsilon')}{2L-\varepsilon^2}\ \ldots\ldots\ (14)$$

Or, à cause de la stabilité de la voûte sur ses naissances, on a $La<p(b+c)$, ou $c>\frac{La-pb}{p}$; donc $\varepsilon'<c$. D'ailleurs il résulte du calcul des divers cas particuliers que généralement dans la pratique, c^2 et par conséquent ε'^2 est moindre que $2L$; donc si, dans l'expression (14), ε croît depuis ε' jusqu'à $\sqrt{2L}$, la hauteur h croîtra en même tems, depuis zéro jusqu'à l'infini. Delà cette conclusion importante que si l'équilibre est établi pour une hauteur donnée du pied-droit, le système a d'autant moins de tendance à tourner autour d'une horizontale, prise dans la face extérieure AD, que cette horizontale est plus élevée au-dessus de l'arête inférieure A. Même conclusion, à plus forte raison, dans l'hypothèse d'où dérive l'équation (9) qui donne

$$h=\frac{6p(\varepsilon-\varepsilon')}{6L-\varepsilon^2}\ \ldots\ldots\ (15)$$

15. Les hypothèses auxquelles se rapportent ces expressions (14) et (15) sont celles qui doivent être admises le plus fréquemment dans les constructions.

Note 6.

sur le N°. 14.

1. En remontant à l'équation immédiate de l'équilibre,

$$\varphi(\cos\alpha' - \sin\alpha' \tang\theta) = p(\sin\alpha' + \cos\alpha' \tang\theta),$$

on aperçoit que quand les quantités φ et $\tang(\alpha'+\theta)$, deviennent négatives, alors la composante de φ parallèle à mn, est moindre que la force du frottement provenant de la composante perpendiculaire; car de $\alpha' > 90^\circ - \theta$, on tire, en prenant les tangentes, $\tang\theta \sin\alpha' > \cos\alpha'$; de sorte que la valeur de φ résout la question dans laquelle la force p serait dirigée en sens contraire ou de bas en haut, ce que rend tout-à-fait évident l'hypothèse $\alpha' = 90^\circ$, qui conduit à $-p = \varphi \tang\theta$.

sur le N°. 30.

2. En se fondant sur ces expériences, les auteurs des nouvelles théories assimilent la voûte à un système de quatre leviers, assemblés bout-à-bout, par articulations, et chargés chacun du poids de la partie qui lui répond.

Ils distinguent les deux modes de rupture du système, puis, pour déterminer le joint intermédiaire, qu'ils appellent le joint de rupture, la plupart modifient le principe de Coulomb et considèrent, lorsqu'il s'agit du premier mode, au lieu du joint de la plus grande pression à l'extrados de la clef, non pas le joint du plus grand moment de la pression, comme nous l'avons fait, mais celui d'où résulte le maximum du rapport entre le moment des forces qui tendent à renverser le levier inférieur et le moment des forces qui tendent à l'affermir. Quant au second mode de rupture, dans lequel la pression s'exerce à l'intrados de la clef, ils prennent le minimum du rapport entre le moment des forces qui tendent à abattre le levier inférieur et le moment des forces qui tendent à le soutenir. On reconnaît aisément que la modification n'est que dans les termes et que, pour la stabilité, cette méthode donne respectivement les conditions $m > HF$, $m' < Hf'$, soit que le pied-droit existe ou non, et ne donne que ces conditions.

figure 18.e

Les mêmes dénominations subsistant, désignons de plus par p' le poids de la partie inférieure, y compris le pied-droit, s'il y a lieu; par s la distance horizontale du centre de gravité G de cette

partie, à l'arête extérieure ou intérieure f de sa base, et par u, v les distances horizontale et verticale du point m au point f.

Considérons d'abord l'état de simple équilibre.

Puisque l'équilibre existe dans le système, il doit exister dans chaque partie séparément; mais à cause de celui de la partie supérieure, on aura

$$\varphi y = p x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

équation qui exprime que la résultante des forces φ et p passe par le point m, auquel parconséquent on peut la concevoir appliquée; et comme le moment de cette résultante par rapport au point f est égal à la différence des momens de ses composantes, l'équilibre de la partie inférieure donnera

$$\varphi v = p u + p' s \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, et observant qu'on a les relations,

$$y + v = H \;.\;.\;.\;.\; (3), \quad p(x+u) + p' s = m \;.\;.\;.\; (4)$$

on obtient cette autre équation

$$\varphi H = m \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

qui résulte tout de suite de ce que l'équilibre permet de considérer le système comme entièrement rigide.

Cela posé, dans l'équation (2) le premier membre désigne le moment des forces qui tendent à renverser la partie inférieure et le second qui, en vertu de (4) et de (1), revient à $m - \varphi y$, représente le moment des forces qui tendent à retenir cette partie inférieure; or, suivant la théorie dont il s'agit, le rapport $\frac{\varphi v}{m - \varphi y}$ des deux momens doit être un maximum dans le premier cas de rupture et un minimum dans le second; donc, en observant que $v = H - y$ et que φ est une fonction implicite de y, on a

$$m(H-y)\,d(\varphi) - (m - \varphi H)\,\varphi\, d y = 0,$$

et simplement

$$d(\varphi) = 0,$$

à cause de l'équation (5). On tire de là $\varphi = F$ ou $\varphi = f'$; valeurs dont la substitution dans cette équation (5), donne $m = HF$ ou $m' = Hf'$, comme on l'a vu par la méthode générale.

Quant à l'état de stabilité, on aura évidemment $m > HF$ ou $m' < Hf'$.

Ajoutons cette remarque: d'une part, le poids p' se décompose en deux autres; $p' \frac{u-s}{u}$ et $p' \frac{s}{u}$, appliqués respectivement en f et

en m; d'autre part, la même équation (2), mise sous la forme; $\varphi v = (p \cdot$
exprime que la résultante des forces φ, p et $p'\frac{s}{u}$ appliquées en m, est ..
-gée selon la droite m f, de sorte que cette résultante peut être censée ..
-pliquée en f, où, par la décomposition elle reproduira ses composantes.
d'où il suit que le point f est dans le même état que s'il était pressé
horizontalement par la force φ et pressé verticalement par les forces
$p'\frac{u-s}{u}$, p et $p'\frac{s}{u}$ dont la somme se réduit à $p+p'$, poids de la demi-
-voûte; c'est un résultat que nous avons obtenu autrement.

Or, nous avons démontré que m et m' désignant les moments de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure et intérieure du joint de naissance, les conditions $L<l$, $L'<l'$, comportent celles-ci $m > Hl$, $m' < Hl'$, qui, abstraction faite du glissement, reviennent à $m > HF$, $m' < Hf'$; mais, comme la réciproque n'est pas vraie, il s'ensuit que ces dernières conditions sont insuffisantes. En outre, l'équilibre de la demi-voûte sans pied-droit, qui est assuré par les conditions $L<l$, $L'<l'$ ne l'est nullement par l'équation $m = HF$ ou $m' = Hf'$; qu'on trouve par les nouvelles théories. De plus, ces théories établissent l'équilibre de la demi-voûte, y compris le pied-droit, en égalant le moment du système, non pas au plus grand moment de poussée, ni même au moment de la plus grande poussée, mais seulement à celui de la pression engendrée soit à l'extrados soit à l'intrados de la clef, selon le cas de rupture, ce qui ne suffit pas non plus. Enfin, ces théories ne montrent pas la liaison entre le premier cas de rupture et le second qu'elles considèrent isolément, sans en donner une explication satisfaisante. De ce que, dans ce second cas, la partie inférieure de la demi-voûte, tourne autour de l'arête d'intrados de sa base, on a conclu que cette partie in-férieure l'emportant sur la partie supérieure, forçait celle-ci de se soulever à la clef, en tournant autour d'une arête d'extra-dos; mais cette rotation et le soulèvement de la clef sont un pur effet de la pression qui se produit à l'intrados de la clef et qui pro-vient toujours de la tendance de la partie supérieure au joint J' à tour-ner autour de l'arête d'intrados de ce joint; en conséquence de cet effet même, la partie inférieure cessant d'être retenue est entraînée par son propre poids et tourne autour de l'arête intérieure de sa base. Ainsi la rotation et le soulèvement dont il s'agit ne sont pas dus à une prépondérance de cette partie sur l'autre, et c'est uniquement la partie supérieure au joint J', laquelle peut devenir toute la

demi-voûte, qui produit la poussée effective et qui est la partie véritablement agissante. Le soulèvement de la clef n'est l'effet de la rotation autour de l'arête intérieure de la base de la demi-voûte, qu'autant que le joint J' coïncide avec cette base, ce qui ne constitue point un cas distinct et séparé et ce soulèvement s'opérera, quelle que soit la position du joint, toutes les fois qu'abstraction faite du glissement, on aura $L' > f'$, sauf le changement de f', quand le joint J tombe au-dessus de j'.

Sur le N° 55.

3 La condition du maximum de la fonction (G) est indépendamment de R et r, $\sin 2(\alpha+\theta)=2\alpha$, équation qui rend négatif le coëfficient différentiel du second ordre, et qui, si l'on fait $\tang\theta=0,76$ ou $\theta=37°$, prendra la forme $\sin(106°-2\alpha)=2\alpha$; or, en se rappelant que dans le second membre α doit être exprimé en parties du rayon et que l'arc égal au rayon est à peu près 57°, on verra d'abord que α tombe entre 8° et 29°, mais plus près de 29; ensuite, par les fausses positions, on trouvera sans peine $\alpha=24°$.

La fonction (g) donne pareillement l'équation $\sin 2(\alpha-\theta)=2\alpha$, à laquelle répondrait aussi un maximum, puisqu'elle rend négatif le coëfficient différentiel du second ordre; mais cette équation est absurde; car, d'une part, 2α ne peut excéder 58°; d'autre part, un arc surpasse toujours son sinus et, à plus forte raison, le sinus d'un arc moindre que lui, s'il s'agit du premier quart de la circonférence. La quantité $\frac{\alpha}{\tang(\alpha-\theta)}$ n'est donc susceptible ni de maximum ni de minimum absolu, et comme sa valeur qui est $\frac{1}{2}\pi \tang\theta$ quand $\alpha=\frac{\pi}{2}$, augmente à mesure que α diminue et devient infinie, lorsque $\alpha=\theta$, et négative au-delà; il s'ensuit que cette valeur en est le minimum relatif ou que le joint i se confond avec celui de naissance, ce que nous avons précédemment établi en général.

Avant d'aller plus loin nous remarquerons qu'en égalant à zéro, une des fonctions (F) et (F') au lieu des deux (f) et (f'), on exprime que $gg'=mm'$ ou nn', c'est-à-dire que la verticale menée par le centre de gravité de φ, passe par le point m ou n.

Le dénominateur de la fonction (F) ne sort pas des limites 6R et $6(R^2-r^2)$; son numérateur qui peut se mettre sous la forme $2\left[3r(R^2-r^2)\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}-2(R^3-r^3)\right]\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, s'anéantit non seulement

quand $\alpha=0$, mais encore lorsque $\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2(R^3-r^3)}{3r(R^2-r^2)}=\frac{2(R^2+Rr+r^2)}{3r(R+r)}$,

valeur comprise entre 1 et 1,5555; puisqu'on peut admettre sans

contredit que R qui surpasse toujours r soit moindre que 2r. Or, la quantité $\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}$, qui devient $\frac{\pi}{2}$ ou 1,5708 en même temps que α, prend la valeur 2, pour $\alpha=0$; et comme à mesure que α croît depuis zéro, elle diminue, jusqu'à devenir nulle pour $\alpha=\pi$; il en résulte que des deux valeurs de α qui réduisent la fonction (F) à zéro, la seconde surpasse $\frac{\pi}{2}$; que cette fonction reste toujours positive depuis l'une de ces valeurs jusqu'à l'autre, et, par conséquent que dans l'intervalle elle comporte un maximum, lequel dépendra du rapport $\frac{R}{r}$.

Les fonctions (f) et (F') suivent la même marche que la quantité $\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}$ qu'elles renferment; or, cette quantité n'est susceptible ni de maximum ni de minimum absolu; sa valeur augmente depuis $\alpha=\frac{\pi}{2}$, d'où résulte le minimum relatif $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à $\alpha=0$, qui donne le maximum relatif 2.

Enfin, le numérateur de la fonction (f') est nul quand $\alpha=0$, et, en sortant du quart de cercle, quand $\frac{\alpha}{\tang\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2(R^2+Rr+r^2)}{3R(R+r)}$, quantité comprise entre 0,7777 et 1, et il demeure positif depuis l'une de ces valeurs de α jusqu'à l'autre; mais le dénominateur est nul pour $\cos\alpha=\frac{r}{R}$, valeur dont les limites sont $\frac{1}{2}$ et 1, et qui signifie que le point n est sur l'horizontale passant par le point c'; il est positif ou négatif pour les valeurs de $\cos\alpha$ plus petites ou plus grandes que celle-là. Ainsi la fonction est négative entre $\alpha=0$ et $\cos\alpha=\frac{r}{R}$, terme où elle devient infinie; à partir de ce terme elle est positive et tend vers zéro; elle n'est donc pas susceptible de minimum absolu, et son minimum relatif répond à $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ce qui montre que quand le point d'application de la force φ est placé en c', le joint j' ne se trouve pas au-dessus du joint J'; de sorte que si, par rapport à ce dernier joint, on avait $\cos\alpha<\frac{r}{R}$, on devrait le prendre pour le joint j' et la force capable de faire tourner autour de son extrados, pour la force f; mais on vient de voir qu'on a $\alpha=0$ ou $\cos\alpha=1$ et par conséquent $\cos\alpha>\frac{r}{R}$; ainsi, dans ce cas, les formules (F') et (f') doivent être rejetées.

Sur le N.° 56.

4. Exemples: 1.° soit $R=11^m,5$; $r=10^m$; $h=2^m$, on trouvera d'abord $G=3,7442$; $g=19,0868$. Ensuite, la première équation (F) reviendra à

$$0,1615=1,15\left(1+\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha\right)-\left(\cos\alpha+\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

et si l'on considère les valeurs extrêmes $\alpha=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, puis la valeur

moyenne $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on apercevra dans quelle moitié du quadrant tombe la vraie valeur de α; alors il suffira de deux suppositions pour trouver cette valeur à moins de $\frac{1}{2}$ degré près: on parvient ainsi à $\alpha = 57°$, valeur dont la substitution dans la seconde équation (F), donne $F = 9,1801$, et par la formule (f) on aura $f = 10,3483$, ce qui montre que la condition $L < l$ est satisfaite. Résolvant donc l'équation (n), on en tirera $\varepsilon = 1,6414$. Lorsque dans le premier membre de cette équation (n) on fait $h=0$ et qu'on y remplace ε par $R-r$, il se réduit à $\frac{1}{4}\pi R(R^2-r^2) - \frac{1}{3}(R^3-r^3) = 117,6595$ et exprime le moment de la demi-voûte, sans pied-droit, par rapport à l'arête extérieure de son joint de naissance; le second membre qui devient $FR = 105,5710$, dans l'hypothèse de $h=0$, est alors le moment de la poussée par rapport à la même arête; d'où résulte $M > FR$, comme cela devait être; car, en général, la voûte se soutenant d'elle-même sur les joints j, j, se soutiendra, à plus forte raison, sur deux joints quelconques correspondants et, dans le cas actuel, ces joints j, j, se confondent avec ceux de naissance.

Il en est autrement pour $R = 11^{m}$; alors la première équation (F) donne $\alpha = 53°$ environ et l'on trouve $G = 2,4381$; $g = 12,4277$; $F = 6,7858$; $f = 0,4631$; d'où suit $F > f$; ainsi la voûte ne pourrait se soutenir d'elle-même. En effet, si l'on calcule f R et M on a également $71,0941$, tandis que $HL = FR = 74,6438$; d'où $M < FR$. On conclut de là que la moindre épaisseur de la voûte qui suffise à l'équilibre est comprise entre 1^{m} et $1^{m},5$.

Supposons encore $R - r = \frac{r}{8}$ ou $\frac{R}{r} = \frac{9}{8}$; la première équation (F) donnera $\alpha = 55°\,23'$; c'est-à-dire que quand l'épaisseur est $\frac{1}{16}$ de l'ouverture de la voûte, le joint J, fait un angle de $55°\,23'$ avec la verticale. En substituant cette valeur de α dans la seconde équation (F), on en déduit $F = 5,1515\left(\frac{r}{4}\right)^2$.

sur le N°. 58.

5. I. Il y a quelques remarques à faire sur ces formules: 1° la première (G) et les deux systèmes (F) et (f) donnent $\varphi = 0$ pour $\alpha = 0$, la dernière donnant en outre φ infini pour $1 - k\cos\alpha = 0$, ou $\cos\alpha = \frac{1}{k}$; 2° les équations des systèmes (f) et (F) sont généralement satisfaites par $\alpha = 0$; 3° (et cela s'applique aux formules du cas précédent) les valeurs de α auxquelles répondent les maximum et minimum ne dépendent que du rapport k; il n'en est pas de même des valeurs des limites F, f, F', f'; mais ces valeurs ont r^2 pour facteur; donc

si les voûtes sont semblables les joints relatifs aux limites sont semblablement placés et les valeurs des limites sont proportionnelles aux carrés des rayons des voûtes, 4°. nous n'avons point cherché la condition du maximum de l'expression (G), qui est susceptible d'une opération plus simple, indiquée précédemment : si par exemple, $\theta=37°$, il est clair que la valeur de α à laquelle répondra le maximum de φ sera comprise entre $\alpha=0$ et $\alpha=90°-37°=53°$; de sorte que la considération de ces valeurs extrêmes et de quelques valeurs intermédiaires fera bientôt découvrir ce maximum et la valeur respective de α.

II. Exemples : soit $\theta=37$, $r=10$, $R=11$; la formule (G) devient

$$\varphi=\frac{100\sin\alpha}{2\tang(\alpha+37)}\left[2,42-1,21.\cos\alpha-\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right];$$

or, α est compris entre 0 et 53, valeurs à chacune desquelles répond $\varphi=0$; on considérera donc d'abord la valeur moyenne 26, dont on déduira $\varphi=3,32027$; ensuite la valeur 25, à laquelle répondra $\varphi=3,26862$; on conclura de là que la vraie valeur de α tombe entre 26 et 53 ; on essaiera 40, d'où résultera $\varphi=3,0268$; puis 30 ; 31 ; 32, 33, qui donneront $\varphi=3,4478$; $\varphi=3,3518$; $\varphi=3,4572$; $\varphi=3,4463$ et montreront que les valeurs cherchées sont $G=3,4572$, $\alpha=32$.

Par un semblable procédé on trouve que $\alpha=65°$ satisfait à l'équation de condition (F) ; cette valeur de α se rapporte à un maximum de φ, puisque, pour $\alpha=64$, $\alpha=65$, $\alpha=66$, la formule (F) donne $\varphi=10,271486$; $\varphi=10,277512$; $\varphi=10,277006$ et comme φ diminue continuellement pour les valeurs de α, plus grandes ou plus petites que celle-là, il s'ensuit qu'on a à peu près $F=10,2775$; $\alpha=65°$.

L'équation (f) est satisfaite par $\alpha=62$, $\alpha=0$; valeurs qui répondent respectivement à un maximum et à un minimum ; en effet, pour $\alpha=61$; $\alpha=62$; $\alpha=63$ la formule (f) donne $\varphi=15,2462$; $\varphi=15,2474$; $\varphi=15,2418$; mais au-delà et en deçà de ce maximum, φ décroît continuellement jusqu'à $\varphi=12,2630$, résultant de $\alpha=90°$, et $\varphi=10,9697$ donné par $\alpha=0$; de plus une même valeur soit positive soit négative de α donne la même valeur de φ ; il n'existe donc qu'un minimum absolu et l'on a $f=10,9697$; $\alpha=0$.

La racine de l'équation (F') est $\alpha=56$ et si l'on fait $\alpha=0$, $\alpha=55$, $\alpha=56$, $\alpha=57$, $\alpha=90$, dans la formule (F') on en tire $\varphi=9,9667$; $\varphi=12,2522$; $\varphi=12,2548$; $\varphi=12,2534$; $\varphi=9,2435$. Cette racine appartient

donc réellement à un maximum et il s'ensuit $F' = 12,2348$; $\alpha = 56$.

Enfin l'équation (f') étant mise en nombres, le second membre devient 6,5613; mais la plus grande valeur que prenne le premier membre est 6,4983 qui résulte de $\alpha = 49$; il n'existe par conséquent ni maximum ni minimum absolu. Effectivement, la formule (f') donne d'abord φ infini pour $\alpha = 24°37'9''$; ensuite φ de plus en plus petit à mesure que α approche de 90°, valeur pour laquelle $\varphi = 13,4874$; à la vérité il vient $\varphi = 0$, quand $\alpha = 0$; mais cette valeur de φ appartenant à la série des valeurs négatives est étrangère à la question. Ainsi il n'existe qu'un minimum relatif $f' = 13,4874$, provenant de $\alpha = 90$.

On voit donc, qu'abstraction faite du glissement sur les joints de naissance, la double condition $L < l$ est satisfaite et que le moment de la force F' par rapport au plan des naissances (ce qui pourrait n'avoir pas lieu par rapport à un plan inférieur) surpassant celui de la force F, c'est la première qui doit être substituée au lieu de L dans l'équation (n). Fesant cette substitution et prenant $h = 0$, $H = r = 10$, on trouvera $\varepsilon = 0^m,5972$. S'il fallait que la voûte fût élevée sur des pieds-droits de 10^m de hauteur, on aurait $h = 10$, $H = 20$, le reste demeurant le même dans cette équation dont on tirerait $\varepsilon = 2^m,5343$.

Soit toujours $\theta = 37$, $h = 0$, $r = 10$ et prenons successivement $R = 10^m,5$; $R = 10^m,3$; $R = 10,25$ ou, en appelant e l'épaisseur à la clef, $e = 0^m,5$; $e = 0^m,3$; $e = 0,25$; nous obtiendrons les résultats classés avec les précédents, dans le Tableau ci-joint, selon les formules (G), (F), (f), (F') (f') et les épaisseurs $0^m,5$; $0^m,3$; $0,^m25$ auxquelles ils se rapportent.

Tableau,

Tableau des résultats obtenus.

Formules	$e = 1^m$		$e = 0,5.$		$e = 0,3.$		$e = 0,25.$	
	α	φ	α	φ	α	φ	α	φ
(G)	0°	0	0	0	0	0	0	0
	31	3,3518	33	2,2085	34	1,7433	35	1,6365
	32	3,4572	34	2,2123	35	1,7495	36	1,6382
	33	3,4463	35	2,2273	36	1,7481	37	1,6320
	53	0	53	0	53	0	53	0
(F)	0	0	0	0	0	0	0	0
	64	10,2749	67	8,1707	69	7,1874	69	6,9245
	65	10,2751	68	8,1737	69½	7,1885	70	6,9295
	66	10,2702	69	8,1703	70	7,1878	71	6,9267
	90	8,4035	90	6,8227	90	6,0655	90	5,8652
(f)	0	10,9697	0	5,2460	0	3,8092	0	2,5621
	61	15,2462	65	10,0827	68	8,1966	68	7,7365
	62	15,2474	66	10,0889	69	8,1981	69	7,7415
	63	15,2418	67	10,0887	70	8,1934	70	7,7410
	90	12,2630	90	8,3315	90	6,8680	90	6,5120
(F′)	0	9,9667	0	4,9958	0	2,9942	0	2,4929
	55	12,2522	64	8,8520	67	7,5017	68	7,1951
	56	12,2548	65	8,8537	68	7,5263	69	7,1968
	57	12,2534	66	8,8503	69	7,4999	70	7,1929
	90	9,2435	90	7,1623	90	6,2472	90	6,0066
(f′)	0	−0	0	−0	0	−0	0	−0
	14°37′1″	∞	17°15′15″	∞	15°51′45″	∞	[illegible]	∞
	40	22,8317	38	10,4633	27	6,4638	24	5,4292
	55	19,1940	39	10,4595	28	6,4500	25	5,4077
	68	17,0765	40	10,4649	29	6,4546	26	5,4078
	90	13,4894	90	8,7476	90	7,0737	90	6,6745

Ces calculs s'abrègent beaucoup au moyen de la table des valeurs de la fonction $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ et de leurs logarithmes.

Il est remarquable que la formule (f) qui n'a donné ni maximum ni minimum absolu, pour e=1, comporte au contraire l'un et l'autre, pour les trois dernières valeurs de e; nous n'avons indiqué dans le tableau que le minimum seulement.

En ne considérant que les valeurs définitivement nécessaires, et en employant pour les angles une notation analogue à celle des forces, nous aurons ce tableau sommaire.

Tableau des valeurs finales.

e	G	B	F	A	f	a	F	A'	f'	a'
1m	3,2372	32	10,2751	65	10,9697	0	12,2548	56	13,4894	90
0,5	2,2123	34	8,1737	68	5,2460	0	8,8537	65	8,7476	90
0,3	1,7495	35	7,1885	69½	3,0892	0	7,5263	68	6,4500	28
0,25	1,6382	36	6,9295	70	2,5621	0	7,1968	69	5,4077	25

qui fait voir, d'une part, la marche de chaque force et de l'angle respectif, en conséquence de la diminution d'épaisseur; d'autre part, les changemens apportés par cette diminution, soit dans la relation de grandeur des forces, soit dans la relation de position des joints correspondans: 1° le joint j reste confondu avec le joint vertical de la clef, du moins pour les épaisseurs supposées et, ce qui est bien remarquable, le joint J' s'abaisse de plus en plus, en s'approchant de la naissance, tandis que le joint j' d'abord placé à la naissance et au-dessous du joint J' se relève et passe au-dessus, en s'approchant de plus en plus du sommet de la voûte; 2° la condition de stabilité $I < l$ n'est pas satisfaite pour les trois dernières épaisseurs et comme le joint j se trouve au-dessus du joint J, il n'y aura rupture qu'autant que F sera capable de faire tourner autour de l'extrados d'un joint inférieur à J; ce qui arrive pour les épaisseurs 0,3 et 0,25; car suivant le tableau général, on a $f = 6,8680$, $f' = 6,5120$ à la naissance et $f = 8,1957$, $f = 7,7410$, à l'extrados du joint J; 3° pareillement, la condition $I' < l'$ n'est remplie que pour les trois dernières épaisseurs; de plus, par rapport à l'une 0,5, le joint j' se trouve au-dessous de J' et selon le même tableau, la force F est incapable de faire tourner autour de l'extrados de tout joint supérieur à J'; mais les deux joints ont la disposition contraire pour les épaisseurs 0,3 et 0,25 sous lesquelles par conséquent la voûte ne manquerait pas de se rompre.

On conclut de là que la moindre épaisseur à la clef est comprise entre 0,5 et 0,3. Quant à la limite supérieure, si toutefois ce genre de voûte en comportait une, on la déterminerait semblablement en attribuant à e des valeurs de plus en plus grandes que 1^{m}

Le développement de ce cas qui est un des plus usités nous a fourni l'occasion d'expliquer la manière d'employer les formules, et la discussion des différens exemples a eu pour objet de confirmer notre théorie et d'en faire bien saisir l'esprit.

Selon les nouvelles théories dont nous avons fait mention et dans lesquelles on ne considère que la force F ou la force f', sans les comparer respectivement aux deux f, F', on trouve que pour l'épaisseur de 1^{m} $\varepsilon=0,4459$, si $h=0$, et $\varepsilon=1,9033$, si $h=10$; et que pour l'épaisseur de 0^{m},3 la voûte se tiendrait d'elle-même, résultat qui manifeste bien la défectuosité de ces théories. (voyez No 4 du Mémorial, pages 32 et 34).

Sur le No. 60.

6. Exemple : communément on donne aux pans de la chape une inclinaison de 45°; alors, en prenant $r=5^{m}$, $R=6^{m}$ et en supposant la droite dl tangente au cercle cf, d'où résulte $B=R\sqrt{2}=8,4858$, on trouve par la formule (F)

$$\begin{aligned} \text{pour } \alpha=45^\circ \ldots\ldots \varphi&=9,3176, \\ \alpha=46 \ldots\ldots \varphi&=9,3546=F, \\ \alpha=47 \ldots\ldots \varphi&=9,3471, \\ \alpha=48 \ldots\ldots \varphi&=9,3309; \end{aligned}$$

Soit de plus $h=2^{m}$ et substituons ces valeurs dans l'équation (n) nous en déduirons $\varepsilon=2^{m},778$ (*).

Sur le No. 64

7. Exemple : supposons le cintre surbaissé au tiers et formé avec trois arcs de 60° chacun : soit $a=10^{m}$, $h=4$, $R-r$ ou $R'-r'=1,5$; il s'ensuivra $c=\frac{1}{6}\pi$; $b=6,6667$; $CO'=x=4^{m},55342$; $r=14,55342$, $r'=5^{m},44658$ et par suite $R=16,05342$, $R'=6,94658$. L'équation (3) donnera (**)

figure 16.e

$$\begin{aligned} \text{pour } \alpha=45^\circ \ldots\ldots \varphi&=12,5248 \\ \alpha=46 \ldots\ldots \varphi&=12,5694=F \\ \alpha=47 \ldots\ldots \varphi&=12,5300 \\ \alpha=48 \ldots\ldots \varphi&=12,5282 \\ \alpha=30 \ldots\ldots \varphi&=11,6895. \end{aligned}$$

(*) Ces résultats sont tirés du Mémorial (No 4, page 37).

(**) Ces résultats sont extraits du Mémorial (No 4, page 43).

En substituant ces valeurs dans l'équation (n) on en tire $\varepsilon = 2^{m},1890$.

Sur le N.° 65.

8. I. Exemple: prenons le même cintre que précédemment et fesons $h=0$, $R-r$ ou $R'-r'=1^{m}$; nous aurons, par la formule (3),

$$\text{pour } \alpha = 45^\circ \ldots\ldots \varphi = 12,9239,$$
$$\alpha = 46 \ldots\ldots \varphi = 12,9563,$$
$$\alpha = 47 \ldots\ldots \varphi = 13,0888 = F,$$
$$\alpha = 48 \ldots\ldots \varphi = 13,0031.$$

et par l'équation (n), $\varepsilon = 0,^{m}7416$.

II. S'il s'agissait d'assigner la moindre épaisseur dont cette voûte est susceptible, on emploierait, depuis $\alpha=0$, jusqu'à $\alpha=c=30^\circ$, les formules (F), (f) de la voûte en plein cintre, et depuis $\alpha=30^\circ$ jusqu'à $\alpha=90^\circ$, les formules (5), (6) indiquées ci-dessus, pour l'espèce de voûte qui nous occupe: soit $R-r=0,^{m}3$; on trouvera $\alpha=25^\circ$, $F'=9,4746$ et $\alpha=23^\circ$, $f'=9,4855$; on voit donc que même par rapport aux forces F', f' la voûte a encore sous l'épaisseur 0,3, quelque stabilité; d'où l'on peut inférer qu'à ouverture égale le cintre surbaissé comporte une moindre épaisseur que le plein cintre, abstraction faite néanmoins du surcroît de résistance dont les voussoirs doivent être pourvus, à raison d'une plus grande pression qu'ils ont à supporter.

On achèverait de déterminer la limite inférieure de l'épaisseur de la voûte en essayant, comme on l'a déjà fait ailleurs, des épaisseurs de plus en plus petites.

Sur le N.° 70.

9. Exemples: 1° soit $h=1,^{m}7$; $r=4,^{m}45$; $R=5,^{m}45$; $a=2,^{m}5$; $b=4,^{m}$; d'où $R-r=1^{m}$, $c=64^\circ$, et $c-\theta=27^\circ$, à cause de $\theta=37$. On mettra d'abord en nombres, les formules (G), (g), (F), (F') et (n) des N.os 54, 56, et 70. On aura

$$\mathcal{L}K = 0,0880365. \quad K = 1,2247. \quad \mathcal{L}.\frac{\pi}{180} = \bar{2},2418774.$$
$$\mathcal{L}K^2 = 0,1760730. \quad \mathcal{L}r = 0,6483600. \quad \mathcal{L}.64 = 1,8061800.$$
$$\mathcal{L}K^3 = 0,2641095. \quad \mathcal{L}r^2 = 1,2967200. \quad \text{som.} = \overline{0,0480574} = \mathcal{L}c$$
$$\mathcal{L}(K^2-1) = \bar{1},6989179. \quad \mathcal{L}r^3 = 1,9450800. \quad \mathcal{L}.\tan 27^\circ = \underline{\bar{1},7071659.}$$
$$\mathcal{L}(K^2-1) = \bar{1},9227255. \quad \text{Diff.}^{ce} = 0,3408915 = \mathcal{L}.\frac{c}{\tan(c-\theta)}$$

$h = 1,7$ $\qquad$ $\mathcal{L}c = 0,0480574.$

$\cos c = 0,43837$ $\qquad$ $\mathcal{L}(K^2-1) = \bar{1},6989179.$

$\overline{2,13837}$ $\qquad$ $\mathcal{L}r^2 = 1,2967200.$

$\frac{1}{2}(h+\cos c) = 1,06918$ $\qquad$ $c.\mathcal{L}2 = 9,6989700$

$\overline{0,7426653};\ 5,52924$

$\sin c \cos c = 0,394$

$\overline{5,13524 = \frac{1}{2}r^2(K^2-1)c - \sin c\cos c.}$

$\mathcal{L}.\sin^2 c = \bar{1},9073204.$

$\mathcal{L}.\cos c = \bar{1},6418420.$

$C.\mathcal{L}.6 = 9,2218487.$

$\mathcal{L}.\frac{1}{6}\sin^2 c\cos c = \overline{\bar{1},7710111};\ n = 0,05902.$

$\mathcal{L}.c = 0,0480574.$

$\mathcal{L}(K^2-1) = \bar{1},6989179.$

$\mathcal{L}.r^2 = 1,2967200.$

$\mathcal{L}.b = 0,6020600.$

$C.\mathcal{L}.2 = 9,6989700.$

$\mathcal{L}\frac{1}{2}br^2(K^2-1)c = 1,3447253;\ n = 22,117.$

$\mathcal{L}\sin^2\frac{1}{2}c = \bar{1},4484194.$

$\mathcal{L}(K^3-1) = \bar{1},9227255.$

$\mathcal{L}r^3 = 1,9450803.$

$\mathcal{L}2 = 0,3010300.$

$C.\mathcal{L}.3 = 9,5228787.$

$\mathcal{L}\frac{2}{3}r^3(K^3-1)\sin^2\frac{1}{2}c = 1,1401336;\ n = 13,808.$

en sorte que les formules deviendront

$$\varphi = 0,1161.\,9,9 \ldots (G), \qquad \varphi = 4,95\,\frac{c}{\tang(c-\theta)} \ldots (g)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0,9739 = \cos\alpha + 1,2247.\frac{\alpha}{\sin\alpha} \\ F = 495.\left(1+\frac{\alpha}{\tang\alpha}\right) - 5,5249 \end{array}\right\} \ldots (F),\ F' = 4,95\,\frac{c}{\tang\frac{1}{2}c} - 4,51116 \ldots (F'),$$

$$\mathcal{E}^2 + 4,80287.\ \mathcal{E} = 0,9353.\,n\,HL \ldots (n).$$

Cela posé, les deux (G) et (g) donnent $G = 1,1494$; $g = 10,8517$. Après quelques essais, on trouve que pour $\alpha = 60°\frac{1}{2}$, le second membre de la première équation (F) est 0,97397; donc $\alpha = 60°\frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans la seconde équation (F), on obtient $F = 2,3830$ (*) et par l'équation (F'), il vient $F' = 4,3375$. Ainsi la voûte est stable sur ses naissances.

Le coëfficient de stabilité, $n = 2$; d'ailleurs $L = F = 2,383$ et $H = \ldots$ $h + R - r\cos c = h + r(K - \cos c)$; on peut donc calculer le second membre de l'équation (n).

(*) Il suffirait de faire $\alpha = 60°\frac{1}{2}$ dans la formule (F) du N.° 54 pour avoir F; mais la formule (F) du N.° 56 ne s'accorde avec celle-là que pour la valeur de α, à laquelle répond le maximum de φ.

$K = 1,2245$

$\cos c = 0,43837$

$K - \cos c = 0,78633$; $\mathcal{L} = \bar{1},8956048$

$\mathcal{L}r = 0,6483600$

$0,5439648$; $3,49917$

$\mathcal{L} = 1,7$

$H = 5,49917$; $\mathcal{L} = 0,7159341$

$\mathcal{L}\,2F = 0,6781540$

$1,3940881$; $24,779$.

Ce second membre est donc $0,9353 . 24,779$ et l'on trouve $\varepsilon = 2^m,20$.

En prenant $n=1$, on ne trouverait que $\varepsilon = 0^m,685$; quantité moindre que ef ou $(R-r)\sin c$ ou $0,8988$ (figure 18^e). Dans ce cas ε n'est pas bien déterminé, parce que l'équation (n), qui suppose $\varepsilon > (R-r)\sin c$, omet le triangle formé par les lignes fa, fe et le prolongement de la face extérieure du pied-droit.

Si l'on observe que le moment du triangle formé par les lignes af, ai et le prolongement de la face extérieure du pied-droit, est $\frac{1}{6}\varepsilon^3 \cot c$, on trouvera cette autre équation

$$\tfrac{1}{6}\cot c . \varepsilon^3 + \tfrac{1}{2} h \varepsilon^2 + \tfrac{1}{2} r^2(K^2-1)c\varepsilon + \tfrac{1}{2} r^2 (K^2-1)\, bc - \tfrac{2}{3} r^3 (K^3-1) = nFH.$$

qui supposera la face extérieure du pied-droit, prolongée jusqu'à la ligne indéfinie oaf. Or, soit φ' la force nécessaire pour empêcher la rotation autour du point a et appelons m le moment $\frac{1}{2} r^2 (K^2-1)\, bc - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^2 \frac{1}{2} c$, de la demi-voûte par rapport à ce point a nous aurons $\varphi' = \frac{m}{r(K-\cos c)}$; mais nous avons $F > \varphi'$, c'est-à-dire, $F r (K - \cos c) > m$ et comme $H = h + r(K - \cos c)$, on voit que pour $n=1$ et à plus forte raison pour $n > 1$, le terme indépendant de ε, dans la nouvelle équation, qui est du 3^e degré, est négatif et que par conséquent cette équation a une racine réelle positive.

La première équation s'emploiera pour $\varepsilon > (K-1) r \sin c$; la seconde, pour $\varepsilon < (K-1) r \sin c$; l'une et l'autre donnent la même valeur de h, lorsqu'on y fait $\varepsilon = (k-1) r \sin c$. On tire de la dernière: . . . .

$$h = \frac{\frac{1}{2} r^3 \sin c \left[c K (K^2-1) + \frac{1}{3}(K-1)^3 \sin c \cos c\right] - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^2 \frac{1}{2} c - F r (K - \cos c)}{F - \frac{1}{2} r^2 (K-1)^2 \sin^2 c}.$$

2° Soit encore $h = 5^m$; $R - r = 1^m,5$ et $a = 10^m$; $2c = 60°$; d'où $b = 2,6795$; $r = 20^m$; $R = 21,^m5$ et $H = 9,^m1795$: on obtiendra $d = c = 30$; $F = 13,4801$ et $\varepsilon = 2^m,7$.

suit le N°. 71.

10. Exemples: prenons le même intrados que d'abord et supposons, pour le premier cas, $h = 5^m$; $R - r = 1$, nous aurons $d = c = 30°$;

$F=9,3258$ et $\varepsilon=3^m,0292$. Soit dans le second cas, $h=6^m$; $R-r=e=1,5$; $I=70°$; d'où $r=20$; $H=21,5$; $B=5,5593$ et $H=9,6795$; il viendra

$$\text{pour } \alpha=20° \ldots\ldots \varphi=19,3034,$$
$$\alpha=30=c \ldots \varphi=24,9405;$$

ce qui fait voir que le joint de plus grande poussée est encore celui de naissance. L'équation (n) donnera $\varepsilon=4,2586$. (*)

On connaîtra facilement que dans le premier et le troisième exemples, la voûte glisserait sur le plan de naissance, s'il s'y trouvait un joint, à moins que les assises supérieures et inférieures ne fussent reliées entre elles ou chargées d'un poids suffisant.

sur le No. 72.

11. Exemple: l'usage est de placer le centre o au sommet d'un triangle équilatéral, construit sur la longueur de la plate-bande; alors $c=30°$ ou $\tang c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et en prenant $a=4$, $e=1$, $h=4$, on trouve $G=1,8277$; $F=7,9444=I$; d'où $\varepsilon=2,851$. Si l'on fesait $e=1,5$ on aurait $G=2,8339$; $F=7,375$; $\varepsilon=2,63$ et avec $e=3,45$ il viendrait $G=F=7,34$. Enfin, que l'on suppose $e=\frac{a\sqrt{3}}{\tang c}=12$, on aura $F=0$ et $G=38,178$

Ici donc il y a telles épaisseurs, à la vérité hors de pratique, pour lesquelles la force G est supérieure à F et doit être employée à sa place, et l'on conçoit que la même chose peut arriver dans d'autres genres de voûtes.

sur le No. 75.

12 Exemple; supposons $\beta=\frac{\pi}{12}$; $R=34$, $r=32$; d'où $K=\frac{17}{16}$; l'équation (F) deviendra

$$2,125=\frac{2,185}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}-1,119\,\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha;$$

Or, la valeur que prend le second membre,

$$\text{pour } \alpha=60° \text{ est} \ldots 2,061$$
$$\alpha=65 \ldots\ldots 2,094$$
$$\alpha=67,30' \ldots 2,117$$
$$\alpha=68° \ldots\ldots 2,122$$

d'où l'on conclut, par les parties proportionnelles, $\alpha=68°\,18'$. Cette valeur substituée dans la formule (F), donne $F=220$.

sur le No. 86.

13. Pour le magasin de Vauban, $h=2^m,5987$; $H=7^m,6337$; $r=4,0605$; $\frac{R}{r}=K=1,24$ et $B\sin I=R$; les formules (F), (f), (n) du No. 60, deviennent donc

---

(*) Les résultats de ces trois exemples ont aussi été pris dans l'ouvrage cité.

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6(k-\cos\alpha)}\left\{\frac{K^2}{\sin I \sin(I+\alpha)}\left[3-\frac{K}{\sin(I+\alpha)}\right]-\left[3\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right]\right\} \cdots (F)$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6K(1-\cos\alpha)}\left\{\frac{K^3}{\sin I \sin(I+\alpha)}\left[3-\frac{1}{\sin(I+\alpha)}\right]-\left[3K\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right]\right\} \cdots (f)$$

$$\frac{1}{2}h\varepsilon^2+r^2\left(\frac{K^2}{\sin 2I}-\frac{1}{4}\pi\right)\varepsilon+r^3\left[\frac{K^2}{\sin 2I}\left(1-\frac{K}{3\cos I}\right)-\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\right)\right]=nFH \,.\,.\, (n)$$

les élément du calcul sont

$l r = 0,6085795$. $l K = 0,0934217$. $l \frac{r^2}{6} = 0,4390077$. $l 3 = 0,4771213$.
$l r^2 = 1,2171590$. $l K^2 = 0,1868434$. $l \frac{K^2}{\sin I} = 0,3082654$. $l \frac{K}{3\cos I} = \bar{1},8004182$.
$l r^3 = 1,8257385$. $l K^3 = 0,2802651$. $l \frac{K^3}{\sin I} = 0,4016871$. $l \frac{K}{\sin 2I} = 0,1913532$.
$l h = 0,4147561$. $l H = 0,8827351$
et l'on trouve

par la formule (F),		par la formule (f),	
pour $\alpha = 45°$	$\varphi = 3,6645$	pour $\alpha = 90°$ . .	$\varphi = 4,0519 = f$;
46	3,6901	60	6,7050
47	3,7122	80	5,1815
50	3,7590	81	5,0881
60	3,7264	82 . . .	4,9936
55	3,7766	83	4,8922
54	3,7790 = F; l = 0,5773762.	85 . . .	4,6863
53	3,7783.	89	4,1941.

On conclut de là $FH = 28,8477$; $n = 1,9417$ et alors la formule (n), c'est-à-dire, $\varepsilon^2 + 9,74845.\varepsilon = 2\left(\frac{19417.FH - 8,05748}{h}\right)$, donne $\varepsilon = 2,915$
sur le N°. 87.

14 Il est clair que les forces élémentaires de la cohésion sont dirigées dans le plan de rupture; or, pour le premier mode de rupture, ce plan est parallèle à l'axe de rotation; par conséquent le bras de levier des forcels est constant et égal à la longueur de queue du contre-fort; mais pour le second mode, le plan de même que lels forces sont perpendiculaires à l'axe de rotation et il faudrait à la rigueur prendre la somme des momens des forces; ce qui conduirait à l'intégrale double

$$\gamma\iint dx\, dy \sqrt{x^2+y^2}.$$

Considérons d'abord la variable y et mettons à part le facteur constant γdx, nous aurons $\int dy\sqrt{x^2+y^2}$ qui intégrée par parties donnera $y\sqrt{x^2+y^2}-\int\frac{y^2 dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; pour avoir cette dernière intégrale posons $\sqrt{x^2+y^2}=z-y$; nous trouverons

$$\frac{1}{8}\left[\frac{(z^2+x^2)(z^2-x^2)}{z^2}\right]-\frac{1}{2}x^2 lz=\frac{1}{2}y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}x^3 l\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

Ainsi, après l'intégration par rapport à y et entre les limites $y=0$, $y=h$, on a

$$\tfrac{1}{2}\gamma\left[h\int dx\sqrt{h^2+x^2}+\int x^2dx\, l\frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x}\right].$$

Le premier de ces termes produira semblablement, $\frac{1}{2}hx\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{2}h^3l(x+\sqrt{h^2+x^2})$; en intégrant le second par parties on obtiendra $\frac{1}{3}x^3\, l\frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x}-\int\frac{1}{3}x^3 d.l\frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x}$; or, l'intégrale indiquée revient à celle-ci $+\frac{1}{3}h\int\frac{x^2dx}{\sqrt{h^2+x^2}}$ déjà traitée et donne $\frac{1}{6}hx\sqrt{h^2+x^2}-\frac{1}{6}h^3l(x+\sqrt{h^2+x^2})$; donc parce que x a pour limites 0 et ε, l'intégrale définie multipliée par 2 et divisée par $a'\delta$ sera

$$\frac{1}{3}\frac{\gamma}{a'\delta}\left[2h\varepsilon\sqrt{h^2+\varepsilon^2}+h^3l\frac{\varepsilon+\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{h}+\varepsilon^3l\frac{h+\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right]$$

la caractéristique l désignant un logarithme népérien. En appliquant aux magasins de Vauban cette formule et la formule approximative que nous lui avons substituée, on trouve respectivement 20,6700; 19,1008; tandis que par rapport au premier mode de rupture, on a seulement 6,2646.

sur le N°. 90.

15 Nous avons trouvé (note 13) $F=3,7790$ et $f=4,0519$; d'où résulte

$$f-F=0,2729\ \cdots\cdots\ (1).$$

figure 13.e

On a prolongé (N°60) le joint mn jusqu'au pan dl de la chape; si on suppose qu'il se replie suivant la verticale nx, alors la partie supérieure $mnxdc$ équivaudra au rectangle $nn'x''x'$, plus les triangles non', xdx'' moins le secteur noc', dont on aura les bras de levier par rapport aux points m ou n, en retranchant de mm' ou nn', les distances des centres de gravité à la verticale od, et les formules seront

$$\frac{\sin^2\alpha}{6r(K-\cos\alpha)}\left\{3BR(2r-R)+R^2(2R-3r)\frac{\sin(I+\alpha)}{\sin I}-r^3\left(3\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}\cdots(F)$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{6Kr(1-\cos\alpha)}\left\{R^2\left(3B-R\frac{\sin(I+\alpha)}{\sin I}\right)-r^2\left(3R\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{r}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}\cdots\cdots(f)$$

Lorsque le pan dl de la chape est tangent à l'extrados, ce qui donne $B=\frac{R}{\sin I}$ et que l'on fait $\frac{R}{r}=K$, ces formules deviennent

$$\frac{r^2\sin^2\alpha}{6(K-\cos\alpha)}\left\{\frac{K^2}{\sin I}\left[3(2-K)-(3-2K)\sin(I+\alpha)\right]-\left(3\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}\cdots(F)$$

$$\frac{r^2\sin^2\alpha}{6K(1-\cos\alpha)}\left\{\frac{K^3}{\sin I}\left[3-\sin(I+\alpha)\right]-\left(3K\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots(f).$$

Pour le magasin de Vauban, $3(2-K)=2,28$; $l(3-2K)=1,7160033$; et l'on trouve,

par la formule (F),	par la formule (f),
pour $\alpha = 53^{\circ} \ldots \varphi = 3{,}7804$	pour $\alpha = 90^{\circ} \ldots \varphi = 4{,}5846 = f$
$54 \ldots \quad 3{,}7820 = F;\ \mathcal{L} = 0{,}5777164.$	$89 \ldots \ldots 4{,}6061$
$55 \ldots \ldots 3{,}7807.$	

On a donc ainsi

$$f - F = 0{,}8026 \ldots \ldots (2)$$

et $FH = 28{,}8703$; $m = 1{,}94016$; $\varepsilon = 2{,}913$.

Puisque le choc d'une bombe est comparable à un poids et que le bras de levier de ce poids est proportionnel à l'ouverture de la voûte, il paraît convenable de déterminer l'épaisseur $R - r$, d'après la condition que la différence $f - F$ soit pareillement proportionnelle à cette ouverture; soit donc d cette différence pour l'ouverture $2r$; on aura la proportion $25 : 2r :: f - F : d$; d'où, en faisant $\frac{2(f-F)}{25} = m'$,

$$d = m'r \ldots \ldots (3)$$

et $m' = 0{,}022$ ou $m' = 0{,}066$, selon qu'on emploiera la valeur (1) ou (2).

Si l'on faisait croître l'épaisseur $R - r$, proportionnellement à r, de sorte que les voûtes fussent semblables; les quantités F, f et par conséquent leur différence croîtraient en raison du carré r^2 (Note 5). D'un autre côté les formules (F), (f), propres à la voûte en plein cintre, extradossée horizontalement sont un cas particulier de celles qui viennent d'être établies, et les tableaux de la note citée, montrent que la différence $f - F$ diminue avec l'épaisseur e. Enfin, lorsque l'épaisseur e demeurant constante, le rayon r augmente de plus en plus, le rapport $K = 1 + \frac{e}{r}$ se rapproche de l'unité, valeur qui rend les formules ci-dessus (F), (f) identiques et la différence $f - F$ nulle. On conclut de là que l'épaisseur déterminée d'après la condition (3), croîtra avec r, mais en moindre raison que celle du carré r^2.

fin.

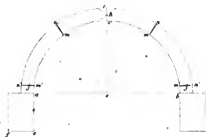
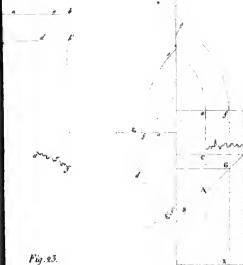
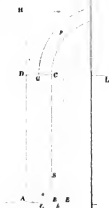



Fig. 5.
Fig. 11.
Fig. 17.
Fig. 16.

POUSSÉE DES

Stabilité des murs de revêtement (*).

Préliminaire.

Division de la théorie.

1. La théorie de la stabilité des murs destinés à soutenir des terres, comprend deux questions : la première a pour objet l'action des terres sur le mur et en général la poussée que peuvent exercer des terres soutenues ou abandonnées à elles-mêmes la seconde qui n'est qu'une application de l'autre, consiste dans la détermination de la forme et des dimensions convenables au mur qui doit résister à la poussée.

La question de la poussée des terres est une des plus importantes de la science des constructions, sur-tout par rapport à la fortification ; aussi s'en est-on fréquemment occupé dans ce dernier siècle.

Poussée des terres ; Défauts des anciennes Théories.

2. Les diverses solutions publiées ou inédites, antérieures à celle de Coulomb, ont été recueillies par Mr Mayniel et insérées dans son traité qui a paru en 1808. Pour peu qu'on examine ces solutions, on s'aperçoit qu'on y a négligé la plupart des circonstances physiques, ou que si l'on y a introduit le frottement, c'est d'une manière tout-à-fait inexacte, et qu'en général elles sont fondées sur des hypothèses arbitraires, quelquefois contradictoires, ou sur des décompositions de forces, mal entendues. (Voyez à ce sujet, recherches sur la poussée des terres &c. par Prony, Nos 19 et 38).

Principes de la Théorie de Coulomb.

3. Le recueil des savans étrangers, tome VII, renferme un mémoire de Coulomb, sous la date de 1773, dans lequel ce Géomètre traite la question en ayant égard aux principales circonstances qui la compliquent, et d'après des considérations aussi exactes qu'ingénieuses, qui joignent à l'avantage de bannir tout arbitraire, celui de conduire à des résultats assez simples pour être appliqués à la pratique.

(*) Ce traité déjà lithographié en 1825, pour l'usage de l'École, a été rédigé sans la connaissance de l'ouvrage de Mr Navier, intitulé : Application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, dont le premier volume n'a paru que sur la fin de 1826.

figure 1re

D'abord l'observation prouve que les terres abandonnées à elles-mêmes, qu'elles soient ou non nouvellement remuées, affectent un talus sensiblement rectiligne. Ensuite il est clair que le frottement étant supposé proportionnel à la pression normale, le talus naturel AC d'une terre sans cohésion, demeure toujours le même, quelle que soit la hauteur AH; mais il en est autrement du talus naturel AD des terres cohérentes, lequel dépend, comme on le verra, de leur hauteur. Le prisme déterminé par la section AC n'a que le frottement à vaincre, tandis que sur l'autre section AS, qui est moins inclinée, le prisme doit surmonter à la fois la cohésion et le frottement.

Supposons les terres appuyées contre un plan quelconque AB, inflexible et dont la résistance fasse équilibre à leur action sur lui: d'une part, la masse ABS est susceptible de se diviser suivant une ligne quelconque AS, droite ou courbe; d'autre part, la pression exercée par le prisme ASB, contre le plan AB, dépend de la nature et de la position de la ligne AS; or, parmi toutes les hypothèses qu'on peut faire sur cette ligne, il en existe nécessairement une à laquelle répond le maximum de pression et ce maximum mesure évidemment la poussée effective des terres contre le plan AB, par conséquent la résistance dont ce plan doit être capable; car s'il peut soutenir le prisme de la plus grande pression, il soutiendra à plus forte raison, tout autre prisme.

Section de la plus grande pression.

4. La détermination de la courbe AS, appartient à la méthode des variations; mais comme en envisageant la question d'une manière aussi rigoureuse, on serait conduit à des expressions analytiques, par trop compliquées, et que vraisemblablement, la substitution d'une ligne droite à la courbe dont il s'agit ne causera pas d'erreur considérable, nous suivrons l'exemple des Géomètres qui ont traité ce sujet, en regardant à priori le profil AS de la section de la plus grande pression, comme rectiligne.

Distinction entre le prisme de la plus grande pression, et le prisme d'éboulement.

5. Au reste, il ne faut pas croire que si le plan AB venait à céder, ce seraient seulement les terres du prisme de plus grande pression, qui s'ébouleraient: l'éboulement s'étendra jusqu'au talus naturel AS ou AC. Nous le viendrons là-dessus en son lieu.

Progrès et imperfections de la théorie.

6. Coulomb, en analysant le cas où le plan AB est vertical, le seul dont il se soit occupé, a donné comme résultat utile dans l'excavation des terres, la relation entre leur cohésion, leur frottement et la hauteur sous laquelle elles peuvent être fouillées à pic sans qu'elles s'éboulent; il était facile d'inférer que réciproquement la cohésion pouvait être déterminée par le moyen de cette hauteur ainsi que du frottement, et de l'exprimer en fonction de ces deux quantités.

Mr de Prony, dans sa mécanique philosophique, a présenté très-simplement l'analyse de ce même cas: pour y parvenir, il a introduit dans le calcul l'expression de la cohésion déterminée comme on vient de le dire, et sur-tout il a indiqué, suivant l'usage, le rapport du frottement à la pression, par la tangente de ce qu'on appelle l'angle du frottement et qui n'est autre chose ici que l'angle du talus que prennent naturellement les terres, lorsque leur cohésion est détruite; ce qui l'a conduit à une expression très-remarquable de l'angle du prisme de la plus grande poussée.

Mr Mayniel a tenté dans son ouvrage la solution du cas général, où le plan AB a une situation quelconque, et où la direction de la poussée n'est certainement plus horizontale, quoi qu'en aient dit M. M. de Prony et Navier (Recherches sur la poussée des terres, par Prony, No 32; Traité de la Construction des ponts, par Gauthey, tome 1er, page 383, note de navier); mais il n'a pas amené l'expression de l'angle du prisme de la plus grande poussée, sous la forme analogue à celle qu'on avait trouvée, quand le plan AB était vertical; et il s'est d'ailleurs mépris dans l'emploi qu'il a fait de cette expression pour évaluer le moment de la poussée.

Ces défauts ont été corrigés dans le No 4 du Mémorial de l'Officier du Génie, où l'on a généralisé aussi le résultat de Coulomb; concernant l'excavation des terres.

Malgré ces perfectionnements, il manquait encore quelque chose à la théorie de la poussée des terres et à son application, quant à la rigueur des raisonnemens et à la simplicité des calculs: on avait formellement confondu le prisme d'éboulement et celui de la plus grande poussée, qui

sont très-distincts l'un de l'autre ; les transformations par lesquelles on arrivait aux formules du cas général, quoique fondées sur les théorèmes élémentaires de la trigonométrie, sont fort longues et deviennent impraticables par leur prolixité, lorsqu'on veut tenir compte du frottement et de l'adhérence sur le parement intérieur du mur, et cependant ces transformations peuvent être évitées ; la hauteur à laquelle des terres coupées suivant un plan donné, peuvent se soutenir d'elles-mêmes, était déterminée par la considération de la section de la plus grande poussée perpendiculaire à ce plan, tandis qu'il faut considérer la section de la plus grande poussée parallèle à cette même section ; enfin, on opposait à la résistance du mur le prisme de la plus grande poussée des terres, au lieu du prisme du plus grand moment de poussée, qui pourrait différer du premier et dont l'identité avec lui, n'est nullement évidente, pas même dans le cas particulier traité par Coulomb.

Nous avons tâché de donner plus de rigueur aux principes de la théorie et plus de simplicité au calcul des formules.

Hypothèses préliminaires.

7. Nous supposerons le mur d'une seule pièce et établi sur une base inébranlable, nous réservant d'examiner ensuite ces hypothèses. Nous supposerons aussi que le frottement soit proportionnel à la pression normale et que la cohésion ainsi que la densité des terres soit uniforme dans toute l'étendue de leur masse ; ces quantités n'éprouvant, en général, que de légères variations dans un même terrain, sur les hauteurs que l'on a à considérer dans la pratique. Enfin, nous ferons abstraction de l'adhérence et du frottement des terres contre le parement intérieur AB du mur de soutènement, ce qui en favorisant la solidité simplifiera la question.

De la poussée des terres, abstraction faite de l'adhérence et du frottement, sur le plan qui les soutient.

Valeur générale de la force capable de soutenir un prisme quelconque de terre.
figure 2e

8. Soit ABC le profil d'une masse de terre, qui se termine d'un côté, au plan horizontal BC, d'un autre côté, au plan incliné BE et qui s'étend indéfiniment dans les autres sens.

Imaginons un plan quelconque AS passant par la droite projetée en A, et déterminant le prisme ABS. Supposons que ce prisme soit retenu sur le plan AS, par une force p de direction quelconque, et cherchons la valeur de la force p, qui convient à l'équilibre, à égard

au frottement et à la cohésion sur le plan AS.

Désignons par q le poids du prisme, par α et θ les angles BAH, BAS; par f le rapport du frottement à la pression, par c la cohésion absolue sur le plan AS et par β l'angle que la direction de la force p fait avec ce plan.

On peut, quant à la grandeur absolue de la force p égale et contraire à la pression qui s'exerce contre le plan AB, regarder le prisme ABS, comme solide; parce que dans un système de forme variable en équilibre, les pressions sur les points fixes sont les mêmes que si le système était rigide. Cela posé, la force p se décompose en deux autres, $p\cos\beta$, parallèle et $p\sin\beta$ perpendiculaire à AS; pareillement le poids q du prisme se décompose en deux forces, $q\cos(\theta-\alpha)$, $q\sin(\theta-\alpha)$ respectivement parallèle et perpendiculaire à AS; de sorte que la condition d'équilibre est

$$p\cos\beta = q\cos(\theta-\alpha) - f[p\sin\beta + q\sin(\theta-\alpha)] - c;$$

d'où résulte en général

$$p = \frac{q[\cos(\theta-\alpha) - f\sin(\theta-\alpha)] - c}{\cos\beta + f\sin\beta} \quad \ldots\ldots (1)$$

Expression de la poussée d'un prisme quelconque perpendiculairement à sa face extérieure.

9. Quand $\beta = 90^\circ - \theta$ ou que la force p est perpendiculaire à AB, on a

$$p = \frac{q[\cos(\theta-\alpha) - f\sin(\theta-\alpha)] - c}{\sin\theta + f\cos\theta} \quad \ldots\ldots (2)$$

expression de la poussée que le prisme ABS exercerait contre le plan opposé AB.

Recherche de l'angle du prisme de la plus grande poussée.

10. Parmi les différentes positions que le plan sécant AS peut prendre sans cesser de passer par la droite A, il en existe nécessairement une qui rend p un maximum, et c'est évidemment ce maximum qui mesure la poussée effective des terres contre le plan AB supposé inébranlable.

Pour déterminer cette plus grande poussée on fera attention que c et q sont des fonctions de θ; or en supposant que le massif ait une épaisseur égale à l'unité linéaire, on n'aura que le simple profil à considérer. Indiquant donc par h la hauteur AH, par δ le poids de l'unité de volume des terres, par γ la cohésion sur l'unité de surface et observant que $AS = \frac{h}{\cos(\theta-\alpha)}$ et par conséquent $BS = \frac{h\sin\theta}{\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)}$, on aura

$$c = \frac{\gamma h}{\cos(\theta-\alpha)}, \qquad q = \frac{\delta h^2 \sin\theta}{2\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)} \quad \ldots\ldots (3)$$

D'ailleurs le rapport du frottement à la pression est, comme on

tant, égal à la tangente de l'inclinaison du plan sur lequel le corps frottant est près de glisser, inclinaison qu'on appelle l'angle du frottement; ainsi, φ étant le complément de l'angle du frottement des terres sur elles-mêmes, c'est-à-dire, le complément de l'angle du talus naturel des terres sans cohésion, on aura encore

$$f = \cot \varphi \ldots\ldots (4)$$

Si l'on substitue ces valeurs, l'expression de la poussée deviendra

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{\cos \alpha} \sin \theta \sin(\varphi + \alpha - \theta) - 2\gamma h \sin \varphi}{2 \cos(\varphi - \theta)\cos(\theta - \alpha)} \ldots\ldots (5)$$

Par le simple changement des produits de sinus et cosinus en sinus et cosinus linéaires, cette expression prendra la forme

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{2\cos \alpha}\cos(\varphi + \alpha - 2\theta) - \left[\frac{\delta h^2}{2\cos\alpha}\cos(\varphi+\alpha) + 2\gamma h \sin\varphi\right]}{\cos(\varphi + \alpha - 2\theta) + \cos(\varphi - \alpha)} \ldots\ldots (6)$$

Alors la condition $\frac{dp}{d\theta} = 0$, donne immédiatement, quel que soit h,

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) \ldots\ldots (a)$$

Théorème remarquable concernant la valeur de cet angle.

11. Cette formule apprend que dans toutes les hypothèses sur les valeurs non seulement de h, mais encore de δ, γ et φ, l'angle de la section ou du prisme de la plus grande poussée est égal à la moitié de l'angle entre le plan AB et le talus naturel des terres privées de leur cohésion; théorème remarquable dont on doit la première indication à Mr. de Prony (Mécanique Philosophique, page 304). La même formule convient par conséquent à un prisme solide dont le frottement sur le plan incliné serait égal à celui des terres sur elles-mêmes, ce qu'on peut aisément vérifier, et elle fournit la même valeur de θ pour la même terre, soit qu'elle ait été ou non nouvellement remuée; car cette valeur ne dépend que du frottement et nullement de la cohésion.

Hauteur sous laquelle la plus grande poussée s'anéantit.

12. Pour avoir la hauteur h' sous laquelle la plus grande poussée devient nulle, on égalera à zéro le numérateur de l'expression (5), on y remplacera θ par sa valeur (a) et l'on trouvera tout de suite

$$h' = \frac{2\gamma \sin\varphi \cos\alpha}{\delta \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)} \ldots\ldots (b)$$

Ayant substitué dans la même expression (5), la valeur de θ et au lieu de $2\gamma \sin\varphi\cos\alpha$, sa valeur tirée de (b), on fera, afin d'abréger,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)} = t \ldots\ldots (c)$$

et l'on aura pour la valeur de la plus grande poussée P, c'est-à-dire, de la poussée effective contre le plan AB, supposé inébranlable,

$$P = \frac{1}{2}\delta h(h-h')t^2\cos\alpha \ldots\ldots (d)$$

laquelle, comme on le voit, dépend de la cohésion.

Expression du rapport entre la base et la hauteur du prisme de la plus grande poussée.

13. Nous avons trouvé en général $BS = \frac{h\sin\theta}{\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)}$; substituons la valeur de θ; il viendra $\frac{BS}{h} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)}$. Ainsi la quantité représentée par t exprime le rapport de la base à la hauteur du prisme de la plus grande poussée.

Formules particulières au cas où le parement intérieur est vertical.

14. Bien entendu que dans ces formules, α est positif ou négatif selon que l'angle des terres à soutenir est obtus ou aigu. Si le parement intérieur du mur était vertical, α serait nul: alors en désignant par h_1 ce que devient h' et observant que $\sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$, on aurait,

$$\theta = \frac{1}{2}\varphi \ldots\ldots (a')$$

$$h_1 = \frac{4\gamma}{\delta\tang\frac{1}{2}\varphi} \ldots\ldots (b')$$

$$\tang\frac{1}{2}\varphi = t \ldots\ldots (c')$$

$$P = \frac{1}{2}\delta h(h-h_1)\tang^2\frac{1}{2}\varphi \ldots\ldots (d')$$

Influence de la cohésion des terres sur leur plus grande poussée.

15. La formule très-simple (d) qui détermine dans tous les cas la valeur de la plus grande poussée, montre, à la seule inspection, que cette valeur est négative sur toutes les hauteurs moindres que h' et qu'en général elle est plus grande pour la même terre, quand la cohésion est détruite que quand elle existe, de toute la quantité $\frac{1}{2}\delta hh't^2\cos\alpha$.

Application de la formule de la poussée au cas de la fluidité.

16. Si au lieu de terres il s'agissait d'un fluide parfait, on aurait $\varphi = 90^\circ$ et $\gamma = 0$; d'où $h' = 0$: alors, à cause de $\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha) = \cos\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)$, il viendrait $t = \frac{1}{\cos\alpha}$; la formule (d) donnerait en conséquence $P = \frac{\delta h^2}{2\cos\alpha}$, valeur qui résulte également de l'expression (5) et cela, quel que soit θ, puisque $\sin(90^\circ+\alpha-\theta) = \cos(\theta-\alpha)$ et $\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$. Lors donc que le plan AB soutient un fluide, tous les prismes tels que ABS exercent contre ce plan la même poussée, laquelle est égale au poids d'un volume de fluide, qui aurait pour base le plan AB et pour hauteur la distance du centre de gravité de ce plan au niveau BS; conclusion tout-à-fait conforme aux principes de l'hydrostatique.

Relation entre les hauteurs sous lesquelles la plus grande poussée des terres coupées verticalement et suivant une inclinaison donnée, devient nulle.

17. De l'élimination de γ entre (b) et (b') il résulte

$$h' = h_1\,\frac{\cos\alpha\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)} \ldots\ldots (e)$$

formule qui se prête fort bien au calcul logarithmique et à laquelle nous reviendrons dans la suite

Recherche du moment de la

18. Pour trouver le point d'application de la force P, nous

plus grande poussée, par rapport au pied du parement intérieur du revêtement.

déterminerons d'abord, comme l'a fait Coulomb, le moment de cette force relativement au point A, pied du parement intérieur du revêtement: La pression sur un élément quelconque du plan AB, est indépendante du mode suivant lequel les terres qui composent le prisme peuvent être censées divisées, pourvu que l'on considère l'action réciproque des parties les unes sur les autres, et le plus simple est de supposer des plans de division parallèles à la section de la plus grande poussée: Alors si l'on substitue dans l'équation (d) à la hauteur h, une hauteur quelconque z, comptée depuis le point H et que l'on différencie cette équation par rapport à z, la pression supportée par le rectangle élémentaire, répondant à dz, sera

$$dP = \delta t^2 \cos\alpha \left(z - \tfrac{1}{2} h'\right) dz\,;$$

mais la distance du point d'application de cette pression au point A, est évidemment $\frac{h-z}{\cos\alpha}$; ainsi, en appelant M le moment de la force P, on aura

$$dM = \delta t^2 (h-z)\left(z - \tfrac{1}{2} h'\right) dz\,;$$

intégrant depuis $z = h'$ jusqu'à $z = h$, on obtiendra

$$M = \tfrac{1}{6}\delta t^2 (h-h')^2 \left(h + \tfrac{1}{2} h'\right) \;.\;.\;.\;.\; (f)$$

expression du moment de la plus grande poussée.

Expression du bras de levier de cette force.

19. Le quotient de M divisé par P, c'est-à-dire,

$$\frac{(h-h')\left(h+\frac{1}{2}h'\right)}{3h\cos\alpha}\,, \text{ ou } \frac{1}{3}\,\frac{h-h'}{\cos\alpha} + \frac{1}{6}\,\frac{h'}{h}\,\frac{h-h'}{\cos\alpha} \;.\;.\;.\; (g)$$

sera la distance du point A au point cherché. On voit qu'elle est comprise entre le tiers et la moitié de la partie de AB, effectivement soumise à la pression des terres; savoir, entre les deux distances relatives au cas d'un fluide parfait et à celui d'un corps solide.

Connaissant cette distance on pourra évaluer le moment de la plus grande poussée P, par rapport à tel autre point que l'on voudra.

Distinction entre le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée.

20. Supposons que le plan AB, au moyen duquel une puissance normale, appliquée, par exemple, en B, doit faire équilibre à l'action des terres, soit mobile autour de l'arête A, comme charnière: s'il existait des prismes dont les poussées particulières, quoique moindres que la plus grande poussée, eussent néanmoins, par rapport au point A, des moments supérieurs à celui de cette plus grande poussée, ce serait évidemment au plus grand de ces momens et non pas au moment de la plus grande poussée, que celui de la

puissance devrait équivaloir ; car il est clair que dans ce dernier cas le plan AB serait infailliblement renversé ; de sorte que la poussée effective contre le plan serait seulement égale à celle du prisme du plus grand moment et n'atteindrait pas jusqu'à la plus grande poussée, laquelle ne pourrait point s'engendrer.

Il est donc essentiel de distinguer le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée et de s'assurer jusqu'à quel point ils peuvent différer l'un de l'autre.

Identité de ces momens, par rapport à un point quelconque du plan vertical, passant par la direction de la poussée.

21. Dans l'équation (6) substituons $\delta h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$ à la place de $2\mathcal{F} \sin\varphi \cos\alpha$: d'abord, si nous désignons par z' la valeur de h, pour laquelle $p=0$, cette équation donnera

$$z' = \frac{2h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos(\varphi+\alpha-2\theta) - \cos(\varphi+\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

ensuite, si au moyen de ce résultat lui-même, on élimine $\cos(\varphi+\alpha-2\theta)$ de l'équation (6) et qu'on y remplace la hauteur h par une hauteur quelconque z, elle deviendra,

$$p = \frac{\delta h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{2} z (z - z')}{h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha) + z' \cos\varphi \cos\alpha},$$

et sa différentielle prise par rapport à z, savoir,

$$dp = \frac{\delta h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha} \times \frac{(z - \frac{1}{2} z')\, dz}{h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha) + z' \cos\varphi \cos\alpha},$$

exprimera la pression supportée par le rectangle élémentaire qui répond à dz. Mais la distance du point A au point d'application de cette pression est $\frac{h-z}{\cos\alpha}$; donc en appelant M' le moment total et observant que . . . . $\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{\cos^2\alpha} = t^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi-\alpha)$, on aura

$$dM' = \delta h' t^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha) \frac{(h-z)(z - \frac{1}{2} z')\, dz}{h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha) + z' \cos\varphi \cos\alpha};$$

d'où l'on tire par l'intégration entre les limites $z = z'$, $z = h$,

$$M' = \tfrac{1}{6} \delta h' t^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha) \frac{(h-z')^2 (h + \frac{1}{2} z')}{h' \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi+\alpha) + z' \cos\varphi \cos\alpha}.$$

La quantité z' dont M' est fonction étant elle-même une fonction de la variable θ, on a $\frac{dM'}{d\theta} = \frac{dM'}{dz'} \frac{dz'}{d\theta}$ et la condition du maximum de M' est $\frac{dM'}{dz'} \frac{dz'}{d\theta} = 0$; or la fonction z' de θ est l'expression (7) et l'équation

$$\frac{dz'}{d\theta} = -2h' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi+\alpha) \frac{\sin(\varphi+\alpha-2\theta)}{\left[\cos(\varphi+\alpha-2\theta) - \cos(\varphi+\alpha)\right]^2} = 0,$$

donne $\theta = \frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$, d'où $z' = h'$; donc, relativement au point A, le moment de la plus grande poussée et le plus grand moment de poussée sont identiques. Il en est de même par rapport à tout autre point de AB; car b étant la distance verticale de ce point au point A, on n'a qu'à introduire dans les calculs précédens $\frac{h-z\mp b}{\cos\alpha}$ au lieu de $\frac{h-z}{\cos\alpha}$, pour passer au nouveau point. On conclut de là que l'identité des deux momens subsiste pour un point quelconque Q du plan ABB; en effet, soit mené la perpendiculaire QR sur AB: puisque la poussée est parallèle à QR, les momens de cette force par rapport aux points R et Q ne diffèrent nullement, non plus que les maximum de ces momens; or, le premier maximum est identique avec le moment de la plus grande poussée; donc le second l'est pareillement.

Faisant $z' = h'$ dans l'expression de M', on retombe sur la valeur de M, obtenue ci-devant.

Discussion des principaux talus et sections qu'on peut considérer dans les terres; expression de la poussée parallèle à une section quelconque.

22. Le numérateur de l'expression (1) de la poussée est indépendant de la direction suivant laquelle cette force est estimée; par conséquent l'angle de la section pour laquelle la poussée devient nulle, aura la même valeur, quelle que soit la direction qu'on ait attribuée à la poussée.

Supposons $\beta = 0$, dans cette expression et substituons y les valeurs de c, q et γ, nous trouverons

$$p = \frac{\delta h\left[h \sin\theta \sin(\varphi+\alpha-\theta) - h' \sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)\right]}{2\sin\varphi\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)} \quad \ldots (8)$$

c'est l'expression de la poussée des terres parallèlement à une section quelconque AD.

Équation qui détermine l'angle de la section parallèlement à laquelle la poussée est nulle.

23. Dans l'équation qu'on obtient en égalant à zéro, le numérateur de cette valeur de p, et qui détermine l'angle de la section parallèlement à laquelle la poussée devient nulle; posons $\frac{h'}{h} = m$, développons $\sin(\overline{\varphi+\alpha}-\theta)$ et divisons par $\cos^2\theta$, nous aurons la transformée

$$\tan^2\theta - \frac{2\tan\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{1-(1-m)\tan^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}\tan\theta + \frac{m\tan^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{1-(1-m)\tan^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\tan\theta = \tan\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)\,\frac{1 \pm \sqrt{(1-m)\left[1+m\tan^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)\right]}}{1-(1-m)\tan^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)},$$

résultat analogue à celui que M.r de Prony a trouvé pour le cas

particulier de $\alpha=0$ et en estimant la poussée perpendiculairement au plan AB, (*Mécanique philosophique*, N°. 359). Mais ce Géomètre a confondu la section dont il s'agit, avec le talus naturel des terres cohérentes, lequel, comme on le verra bientôt, est tout autre chose.

Il est clair que tang θ sera réel pourvu que m ne surpasse point l'unité ou que h ne soit pas moindre que h'; et comme $tang\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$ est positif, les valeurs de tang θ seront toutes deux positives et inégales, ou l'une positive et l'autre négative, ou se réduiront à une seule, selon que 1-m sera inférieur ou supérieur ou égal à $\cot^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$; les deux valeurs seront égales entre elles et à $tang\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$ si $m=1$; enfin l'une sera zéro et l'autre égale à $tang(\varphi+\alpha)$, si $m=0$. Au reste, les deux valeurs de θ étant désignées par θ', θ'', les coefficients de l'équation donnent immédiatement la relation $\theta'+\theta''=\varphi+\alpha$.

Section de la plus grande poussée parallèle à cette section.

24. L'expression (8) de la poussée parallèle à une section quelconque comporte un maximum de même que celle de la poussée perpendiculaire au talus extérieur des terres. Or, cette expression prend la valeur

$$\frac{\delta h(h-h')\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)}{2\sin\varphi\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)},$$

lorsqu'on y fait $\theta=\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$; de là et de ce que $\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')=\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$, on conclut que, 1° si h surpasse h' ou si $m<1$ la valeur de la poussée est positive dans l'intervalle de θ' à θ'' et qu'elle est négative hors de cet intervalle; ce qui signifie qu'alors le prisme ne peut de lui-même surmonter le frottement et la cohésion, et devrait pour cet effet être tiré par une force équivalente à la poussée, abstraction faite du signe; 2° si $h=h'$ ou $m=1$, la poussée n'est réductible à zéro que par une seule valeur de θ; mais cette valeur qui réduit la poussée à zéro la rend en même temps un maximum; puisque pour toute autre valeur la poussée devient négative; 3° si h est moindre que h' ou $m>1$ la poussée n'est plus réductible à zéro ni susceptible de maximum. Donc θ, désignant la valeur de θ, à laquelle répond le maximum de p et θ' la plus grande des deux valeurs qui rendent p nul, on aura, en général $\theta_1<\theta'$.

Équation qui détermine l'angle de la section de la plus grande poussée parallèle à cette section.

25. Quant à la valeur θ, relative au maximum de p, on trouvera l'équation dont elle dépend en développant dans l'expression (8), le produit $\sin(\overline{\theta-\alpha}+\alpha)\times\sin(\varphi-\overline{\theta-\alpha})$, effectuant au-

-tant qu'il sera possible la division par $\cos(\theta-\alpha)$ et égalant ensuite la différentielle à zéro. Soit, pour abréger, $A=\cos\varphi\cos\alpha+m\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$, on trouvera ainsi

$$\tang^3(\theta-\alpha)+\left[1+\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{A}\right]\tang(\theta-\alpha)-\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{A}=0.$$

Cette équation n'a qu'une racine réelle, laquelle est positive, nulle ou négative, selon qu'on a $\alpha<\varphi$, $\alpha=\varphi$, $\alpha>\varphi$. Elle se vérifie, dans le cas de $m=1$, ou $h=h'$, par $\theta=\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$, c'est-à-dire, $\theta-\alpha=\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)$, et, pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'alors $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\varphi-\alpha)$.

Détermination de l'angle et de la hauteur sous lesquels cette plus grande poussée devient nulle.

26. On peut trouver directement les valeurs particulières de θ et de h ou de α, pour lesquelles cette plus grande poussée s'anéantit: en effet, l'expression (8) étant de la forme $\frac{N}{R}$, la condition du maximum sera $R\,dN-N\,dR=0$, mais l'anéantissement de ce maximum emporte $N=0$, équation qui réduit la précédente à $dN=0$; par conséquent les valeurs cherchées sont déterminées par les deux équations,

$$N=\delta h\left[h\sin\theta\sin(\varphi+\alpha-\theta)-h'\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi+\alpha)\right]=0,$$
$$\frac{dN}{d\theta}=\delta h^2\sin(\varphi+\alpha-2\theta)=0;$$

d'où l'on tire

$$\theta=\tfrac{1}{2}(\varphi+\alpha)\quad\text{et}\quad h=h'=\frac{2\gamma\sin\varphi\cos\alpha}{\delta\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)},$$

ce qui est l'équation (b) ci-dessus.

Il est aisé encore de reconnaître si l'on a ou non $\theta=\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$, quel que soit h; car, puisque cette valeur de θ satisfait indépendamment de h à $dN=0$ et non à $N=0$, elle ne vérifiera l'équation du maximum qu'elle réduit déjà à $dR=0$, qu'autant qu'elle satisfera de même à cette dernière; or, on a

$$dR=-2\sin\varphi\cos\alpha\sin(\theta-\alpha),$$

résultat qui ne s'évanouit point par la substitution de la valeur $\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$. On conclut de là que l'angle θ de la section de la plus grande poussée parallèle à cette section, varie avec la hauteur h et ne devient $\frac{1}{2}(\varphi+\alpha)$ que si $h=h'$, auquel cas cette plus grande poussée s'anéantit.

De la poussée absolue des terres; hauteur à laquelle on peut les fouiller sous un angle donné sans qu'elles s'éboulent.

27. La plus grande poussée dans cette direction particulière mesure l'effort que des terres abandonnées à elles-mêmes, sont capables de faire pour se rompre et constituer proprement ce qu'on doit entendre par la poussée absolue des terres. Or, puisque

cette poussée absolue s'anéantit pour $h=h'$ et que la poussée paral-lèle à une section plus ou moins inclinée que celle de la poussée absolue devient négative, ainsi qu'on l'a vu dans la discussion de l'expression (8), (N° 24; art. 2°), il s'ensuit que les terres se soutiendront d'elles-mêmes, sur la hauteur h' et sous l'angle donné α.

Mais nous avons désigné par h dans la formule (b), la hauteur sous laquelle les terres n'exercent plus de poussée perpendiculairement au plan AB, faisant en dehors un angle α avec la verticale ou un angle $90°-\alpha$ avec l'horizon; l'équation $h=h'$ démontre que cette hauteur h' est aussi celle à laquelle les terres peuvent se soutenir sous l'angle $90°-\alpha$, par leur propre cohésion. Pareillement, la hauteur h, qui entre dans la formule (b'), est celle sur laquelle on peut couper les terres à pic, sans qu'elles s'éboulent.

Angle du talus naturel des terres cohérentes.

28. Les équations $N=0$, $\frac{dN}{d\theta}=0$ ramenant à l'équation (b), cette dernière ou l'équation (c) dans laquelle on écrirait h au lieu de h, pourra être regardée comme exprimant la relation entre la hauteur des terres, et l'angle sous lequel ces terres étant coupées, leur poussée absolue devient nulle; et de même que h' indique la valeur de h qui répond à une valeur donnée de α, réciproquement nous désignerons par φ' la valeur de α, relative à une hauteur donnée h. Or, il est clair que cet angle φ' ainsi lié avec la hauteur h, n'est autre que celui du talus naturel des terres cohérentes.

Équation qui détermine l'angle de ce talus.

29. Je fais $\frac{h_1}{h}=m$, j'écris $-\varphi'$ au lieu de α, puis observant d'une part que $\cos\varphi'=\cos(\varphi-\overline{\varphi-\varphi'})=\cos\varphi\cos(\varphi-\varphi')+\sin\varphi\sin(\varphi-\varphi')$; d'autre part, qu'en général $2\sin^2\frac{1}{2}x=1-\cos x$, j'obtiens l'équation

$$\tang^2(\varphi-\varphi')-P\tang(\varphi-\varphi')-Q=0, \quad \dots \quad (9)$$

P et Q désignant des quantités essentiellement positives. Donc les deux racines sont réelles et de signes contraires, en sorte qu'il existe deux talus placés de part et d'autre de la verticale, sous lesquels et sur la hauteur donnée h, les terres se soutiendront d'elles-mêmes, la rupture tendant à s'opérer sous l'angle $\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$. En ne considérant que la racine positive on aura donc $\varphi'<\varphi$: ainsi les deux talus sont au-dessus de celui dont l'angle est φ.

Conséquences de la discussion précédente.

30. Il résulte de la discussion précédente que si des terres élevées sur une hauteur h plus grande que h', cessent tout-à-

coup d'être soutenues, les molécules composant le prisme déterminé par la section dont l'angle est $\theta'' - \alpha$ avec la verticale, resteront unies entre elles, tandis que les molécules comprises entre cette section et celle qui répond à l'angle $\theta' - \varphi$ se désuniront nécessairement. Ainsi, lorsqu'un mur de revêtement vient à céder, le prisme qui se détache n'est pas seulement celui de la plus grande poussée relative, ou perpendiculaire au parement intérieur, c'est-à-dire, celui qui se termine à la section dont l'angle avec la verticale est $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$; ce n'est pas seulement non plus le prisme de la poussée absolue, lequel est terminé à la section dont l'angle est $\theta_1 - \alpha$, plus grand que $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$; mais c'est tout le prisme qui s'étend jusqu'au talus naturel, dont l'angle est $\varphi' > \theta_1 - \alpha$.

Par exemple, dans le cas des terres cohérentes, supposé que $\alpha = \varphi$, la section de la plus grande poussée relative et celle de la poussée absolue se confondent en un seul plan qui est vertical et les valeurs de $\text{tang}(\theta' - \alpha)$, $\text{tang}(\theta'' - \alpha)$ se réduisent à $\pm \text{tang}\,\varphi \sqrt{\frac{1-m}{1+m\,\text{tang}^2\varphi}}$; or, il est évident que l'éboulement ne s'arrêtera pas à ce plan vertical et qu'il s'étendra de l'autre côté jusqu'à la section qui fait avec lui l'angle φ'. (*)

Par exemple encore, dans le cas des terres meubles ou sans cohésion sensible, l'angle de la section de la plus grande poussée relative est toujours $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$; celui de la section de la poussée absolue est plus grand que $\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$, mais moindre que φ' et l'on a $\varphi' = \varphi$; or il est bien clair que l'éboulement se portera jusqu'à cette dernière limite.

(*) On a $\text{tang}(\overline{\theta - \varphi} + \varphi) = \frac{\text{tang}(\theta - \varphi) + \text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}(\theta - \varphi)\,\text{tang}\,\varphi} = \text{tang}\,\varphi \times \frac{1 \pm \sqrt{(1-m)[1 + m\,\text{tang}^2\varphi]}}{1 - (1-m)\,\text{tang}^2\varphi}$; d'où l'on tire $\text{tang}(\theta - \varphi) = \text{tang}\,\varphi \times \frac{(1-m)\,\text{tang}^2\varphi \pm \sqrt{(1-m)(1+m\,\text{tang}^2\varphi)}}{1 + m\,\text{tang}^2\varphi \pm \text{tang}^2\varphi\sqrt{(1-m)(1+m\,\text{tang}^2\varphi)}}$. Mettant $\sqrt{1-m}$ en facteur au numérateur et $\sqrt{1+m\,\text{tang}^2\varphi}$ au dénominateur, puis supprimant l'autre facteur qui est commun aux deux termes, on trouve l'expression simplifiée, qu'on aurait obtenue directement si, dans la formation de l'équation qui donne θ', θ'' on avait pris pour inconnue $\theta - \alpha$ au lieu de θ. On trouve alors l'équation

$$\text{tang}^2(\theta - \alpha) - \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{A}\,\text{tang}(\theta - \alpha) + 1 - \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{A} = 0.$$

Il est donc certain que le prisme d'éboulement et celui de la plus grande poussée ou du plus grand moment sont tout différens, et c'est une erreur manifeste que de les avoir confondus, comme on l'a fait, dans la théorie, sur-tout dans les expériences entreprises pour la vérifier.

Moyen d'évaluer la cohésion des terres.

31 De la formule (b') on tire réciproquement

$$\gamma = \frac{1}{4}\delta h, \tang \frac{1}{2}\varphi \ldots\ldots (h)$$

la force de la cohésion des terres se conclura donc de leur pesanteur spécifique, du talus qu'elles affectent lorsque leur cohésion est détruite et de la plus grande profondeur à laquelle elles peuvent, lorsque leur cohésion subsiste, être coupées à pic, sans s'ébouler; toutes données dont la connaissance résulte d'expériences fort simples et peu dispendieuses. D'ailleurs h' se déduira de h, par la formule (e) ou se déterminera par une expérience immédiate. C'est à Mr. de Prony qu'est due l'idée de ce moyen aussi curieux qu'utile d'évaluer la cohésion des terres (Mécanique philosophique, page 304).

Problèmes relatifs aux hauteurs et talus des excavations et levées de terre.

32 La formule (e), que nous allons reprendre et dans laquelle nous écrirons h au lieu de h', s'applique très-utilement à la construction des ouvrages en terre, tels que fossés, retranchemens, digues, chaussées &c.a et parce qu'ici l'angle du talus des terres avec la verticale est intérieur, nous ferons $\alpha = -\varphi'$; nous aurons en conséquence

$$h = h_{,} \frac{\cos\alpha \sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \ldots\ldots (e')$$

équation qui exprime la relation entre la hauteur et l'angle du talus d'une excavation ou d'une levée de terre, sous la condition que la poussée absolue soit nulle; de sorte qu'on peut déterminer l'une de ces deux choses, la hauteur et le talus, quand l'autre est donnée, pourvu que l'on connaisse aussi la qualité des terres, c'est-à-dire, l'angle de leur talus naturel, la cohésion étant détruite, et la hauteur à laquelle elles sont capables de se soutenir à pic, la cohésion subsistant.

La première question, dans laquelle φ et φ' étant donnés, on cherche la quantité h est immédiatement résolue: par exemple, si le talus d'une excavation doit être 0,m40 de base sur 1 de hauteur, supposé que le talus naturel des terres soit 1 de base sur 1 de hauteur, on a $\tang\varphi' = \frac{0,40}{1}$, $\tang\varphi = \frac{1}{1}$, ou $\varphi' = 21°48'5''$; $\varphi = 45°$ et l'on trouve $h' = 3,36\, h_{,}$.

La seconde question, beaucoup plus usuelle et où il s'agit de déterminer φ', connaissant h ainsi que h_1 et φ, n'offre pas la même facilité. C'est, comme on l'a vu, celle du talus naturel des terres cohérentes.

Soit $\frac{h_1}{h} = m$, si l'on applique encore la transformation $\sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1-\cos x)$ et que l'on développe $\cos(\varphi-\varphi')$, la formule (e') deviendra

$$[\cos\varphi + m(1-\cos\varphi)]\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (i)$$

Si $\gamma = 0$ ou si $h = \frac{1}{0}$, on aura $m = 0$ et l'équation donnera immédiatement $\varphi' = \varphi$. Lorsque $h = h_1$ ou $m = 1$, il vient $\varphi' = 0$ et $\tang\varphi' = \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. En négligeant le frottement ou en faisant $\varphi = 90°$, on trouverait $\tang\varphi' = \frac{1-m^2}{2m}$.

L'équation (i) ne serait que du second degré par rapport à $\tang\varphi'$ comme par rapport à $\tang(\varphi-\varphi')$; mais on parviendra à des résultats plus commodes, au moyen d'angles auxiliaires; je pose d'abord

$$\cot A = m \tang\tfrac{1}{2}\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (j)$$

d'où résulte $m = \frac{\sin\varphi\cot A}{1-\cos\varphi}$, à cause de $\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Substituant j'obtiens $(\cot\varphi + \cot A)\cos\varphi' + \sin\varphi' = \frac{1}{\sin\varphi}$; faisant ensuite $\cot B = \cot\varphi + \cot A$, c'est-à-dire,

$$\cot B = \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin A \sin\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (j')$$

j'ai finalement

$$\cos(B-\varphi') = \frac{\sin B}{\sin\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (k)$$

Les angles A et B se calculeront aisément par les formules (j) et (j') et par la dernière (k) on aura tout de suite la valeur de $B-\varphi'$ ou de $\varphi'-B$.

Par exemple, si $h = 4^m$; $h_1 = 0^m,9$ et que le talus naturel des terres soit $1^m,2$ de base sur 1^m de hauteur; d'où résulte $\frac{h_1}{h} = \frac{0,9}{4}$, $\tang\varphi = \frac{1,2}{1}$ et $\varphi = 50°\ 11'\ 40''$, on trouve $A = 83°\ 59'$, $B = 46°\ 48'\ 40''$; $B-\varphi' = 18°\ 21'\ 50''$, $\varphi' = 28°\ 26'\ 50''$ et $\tang\varphi' = 0,54$; c'est la base du talus demandé, toujours sur 1 de hauteur (*).

Remarques sur l'application des formules.

33. Quoique la valeur de h ou de φ' soit ainsi déduite d'une équation d'équilibre, il ne sera pas à craindre que les terres ne se

---

(*) Ce n'est donc pas d'une équation du 4^e degré, trop compliquée que dépend la valeur de α, comme on l'a avancé dans le Mémorial (N°.4, page 192) et la table construite pour y suppléer est superflue.

soutiennent point sur la hauteur ou sous le talus trouvé par le calcul, pourvu que dans les expériences par lesquelles on aura déterminé h, on ait eu égard aux causes accidentelles qui peuvent rompre l'équilibre des terres, ce qu'on fait en coupant à pic une même terre sur différentes hauteurs, la laissant exposée assez longtems aux variations météorologiques et prenant pour h, la plus grande hauteur sous laquelle cette terre aura résisté. Une autre observation, c'est que dans la théorie, on suppose la densité et la cohésion uniformes; or, d'un côté, la densité peut bien augmenter avec la profondeur à raison du poids des couches supérieures; d'un autre côté, il peut arriver que la cohésion, après avoir paru sensiblement constante jusqu'à une certaine profondeur, s'affaiblisse ensuite par l'effet de l'humidité des couches inférieures: il est bon d'avertir que dans ces sortes de cas les formules devront être appliquées avec circonspection.

Résultats de l'expérience sur la pesanteur spécifique, le frottement et la cohésion des terres.

34. Nous terminerons la théorie de la poussée des terres, en rapportant ce que l'expérience a appris sur les données nécessaires à l'application des formules:

1° Pesanteur spécifique des terres, le poids de l'eau étant pris pour unité;

Terres				Sables	
Végétale.	franche.	argileuse.	glaise.	Terreux.	Pur
1,4	1,5	1,6	1,9	1,7	1,9

2° Rapport du frottement à la pression, lequel s'exprime par la tangente de l'angle du talus qu'affectent les terres, quand leur cohésion est détruite.

Suivant les expériences de M^r. Rondelet (art de bâtir, tome 3, pages 135, 139, 141) l'angle du talus naturel, pour le sable fin, bien sec ou pour le grès pulvérisé, est de 34° 30'; pour la terre ordinaire, bien sèche et pulvérisée, de 46° 50' au moins, et, si elle est légèrement humectée, de 54° au plus; ce qui donne respectivement les valeurs 0,69 .... 0,94 .... 1,38 de f ou les valeurs 55° 30', 43° 10', 36° de φ.

3° Cohésion des terres.

On manque d'observations précises à ce sujet: tout ce qu'on sait, c'est qu'en fait de terres rassises ou qui ont éprouvé une grande compression, la terre franche et les terres fortement argileuses, peuvent, sans s'ébouler, être coupées à pic, respectivement sur une hauteur de 1 à 2^m et 3 à 4 ou même davantage.

En prenant, pour la terre franche, $\delta = 1500^{kg}$, $h_i = 1^m$, $\varphi = 40°$ et, pour les terres les plus fortes, $\delta = 1800^{kg}$; $h_i = 4^m$; $\varphi = 35°$, on trouvera par la formule (h), $\gamma = 136^{kg}$ et $\gamma = 568^{kg}$; résultats qu'on peut regarder comme les deux limites des valeurs du coefficient γ de la cohésion des terres.

Application de la théorie de la poussée des terres à la détermination de l'épaisseur des murs de Revêtement

Détermination de l'épaisseur des revêtements.

35. Lorsqu'il s'agit de déterminer les dimensions qu'un mur de revêtement doit avoir pour résister à l'effort des terres qui le pressent, on regarde ce mur comme un corps solide, continu, assis sur une base incompressible, et l'on observe qu'il peut céder de deux manières différentes à l'action des terres, savoir, qu'il peut être renversé en tournant autour de l'arête extérieure de sa base, ou qu'il peut être repoussé horizontalement en glissant sur cette base, de sorte qu'il ne résiste dans le premier cas que par son propre poids et dans l'autre par l'adhérence et le frottement sur sa fondation.

Pour plus de généralité, nous attribuerons au revêtement une hauteur H différente de la hauteur h des terres qu'il est destiné à soutenir; cette dernière sera la hauteur réduite quand le remblai se trouvera surchargé d'une masse de terre ou d'un poids quelconque, c'est-à-dire qu'on remplacera la surcharge par un trapèze équivalent dont les deux côtés non horizontaux soient dans le prolongement de ceux du triangle de plus grande poussée, ce qui sera suffisamment exact.

Hypothèse du renversement.

36 Occupons-nous d'abord du premier cas. On sait que le plus grand moment de poussée peut être remplacé par le moment de la plus grande poussée, quel que soit le point auquel ces moments se rapportent. Or, relativement au point A, le bras de levier de la plus grande poussée est (g)

$$\frac{(h-h')(h+\frac{1}{2}h')}{3h\cos\alpha};$$

figure 3.e

mais en représentant par x l'épaisseur AF du revêtement à sa base et abaissant du point F la perpendiculaire FI sur AB, on a AI = x sin α; de plus la différence de ces deux quantités est le bras de levier par rapport au point F; donc si l'on reprend l'expression (d),

$$\frac{1}{2}\delta h(h-h')t^2\cos\alpha$$

de la plus grande poussée et que l'on désigne par m le moment par

rapport à ce point F, on aura

$$m=\frac{1}{2}\delta t^2\left[\frac{1}{3}(h-h')^2(h+\frac{1}{2}h')-h(h-h')x\sin\alpha\cos\alpha\right]\ldots\ldots\ldots(9)$$

D'un autre côté, soit ε l'angle EFH du talus extérieur EF avec la verticale, r le rapport de la densité δ des terres à la densité δ' de la maçonnerie et m' le moment du revêtement ABEF par rapport au même point F; il est clair que le moment du rectangle AFHL sera $\frac{1}{2}\delta' H x^2$, tandis que ceux des triangles EFH, ABL seront respectivement $\frac{1}{6}\delta' H^3 \tan^2\varepsilon$ et $\frac{1}{2}\delta' H^2 \tan\alpha(x-\frac{1}{3}H\tan\alpha)$, lesquels retranchés du premier donneront

$$m'=\frac{1}{2}\delta' H\left[x^2-Hx\tan\alpha+\frac{1}{3}H^2(\tan^2\alpha-\tan^2\varepsilon)\right]\ldots\ldots(10)$$

Maintenant, la condition de l'équilibre entre la poussée des terres et la résistance du revêtement, consiste dans l'équation, $m=m'$; c'est-à-dire,

$$\frac{x^2}{H^2}-\tan\alpha\left[1-rt^2\frac{h(h-h')\cos^2\alpha}{H^2}\right]\frac{x}{H}-\frac{1}{3}rt^2\frac{(h-h')^2(h+\frac{1}{2}h')}{H^3}+\frac{1}{3}(\tan^2\alpha-\tan^2\varepsilon)=0$$

soit donc

$$A=\frac{1}{2}\tan\alpha\left[1-rt^2\frac{h(h-h')\cos^2\alpha}{H^2}\right],\ B=\frac{1}{3}rt^2\frac{(h-h')^2(h+\frac{1}{2}h')}{H^3},\ C=\frac{1}{3}(\tan^2\alpha-\tan^2\varepsilon);\ \ldots(l)$$

il viendra

$$x=H(A+\sqrt{A^2+B-C}),\ldots(m)$$

le signe + du radical convenant seul à la question, comme on le voit par la supposition de $\alpha=0$, et l'autre signe ne se rapportant qu'à des considérations abstraites d'équilibre.

Ainsi, en général, et eu égard tant à la cohésion qu'au frottement des terres, on obtiendrait l'épaisseur d'un revêtement, en calculant trois termes assez simples et en extrayant une racine carrée, à quoi les tables trigonométriques ne seraient même pas nécessaires, si les angles α et ε étaient donnés par leurs tangentes, c'est-à-dire, par les rapports des bases des talus à leurs hauteurs; car $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$ et la valeur de t résulte immédiatement d'une construction qui se réduit à diviser en deux parties égales l'angle entre le talus naturel des terres sans cohésion et le parement intérieur du revêtement

Lorsque le parement intérieur est vertical on a $\alpha=0$, $h'=h_1$, $t=\tan\frac{1}{2}\varphi$ et simplement.

$$x=H\sqrt{\left[\frac{1}{3}\frac{r\tan^2\frac{1}{2}\varphi(h-h_1)^2(h+\frac{1}{2}h_1)}{H^3}+\frac{1}{3}\tan^2\varepsilon\right]}\ldots(n)$$

Comme la résistance produite par la cohésion des terres est sujette

à trop d'accidens pour qu'il soit prudent de s'y fier dans la pratique et que d'ailleurs elle devient nulle dans le cas des revêtemens remblayés nouvellement, sans que les terres aient été damées, il sera convenable de faire abstraction de cette force; alors on aura $h'=0$, $h_1=0$ et les formules (m) et (n) deviendront

$$x=H\left\{\frac{1}{2}\tan\alpha\left(1-rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)+\sqrt{\left[\frac{1}{4}\tan^2\alpha\left(1-rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)^2+\frac{1}{3}rt^2\frac{h^3}{H^3}-\frac{1}{3}\left(\tan^2\alpha-\tan^2\varepsilon\right)\right]}\right\}\ldots(o)$$

$$x=H\sqrt{\frac{1}{3}\left(r\tan^2\tfrac{1}{2}\varphi\frac{h^3}{H^3}+\tan^2\varepsilon\right)}\ldots\ldots(p)$$

si, de plus on suppose que le parement extérieur soit vertical de même que l'intérieur, ou qu'on ait encore $\varepsilon=0$, la dernière formule se réduira à

$$x=h\tan\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\left(\frac{r}{3}\cdot\frac{h}{H}\right)}\ldots\ldots(q)$$

Telles sont les formules propres à l'hypothèse du renversement; or le mur est susceptible non seulement de tourner autour de l'arête extérieure de sa base, mais encore de glisser sur cette même base; il est donc nécessaire de s'assurer si les dimensions calculées dans l'hypothèse de la rotation suffiront pour empêcher le glissement.

Hypothèse du glissement

37. Nous conserverons les mêmes notations, si ce n'est que nous désignerons par x' l'épaisseur du revêtement dans l'hypothèse de la translation, et relativement à la maçonnerie, par f' le rapport du frottement à la pression, enfin par γ' la cohésion sur l'unité de surface.

D'abord, la composante horizontale de la poussée p d'un prisme quelconque est $p\cos\alpha$, tandis que le frottement dû à la composante verticale est $f'p\sin\alpha$ et il est clair qu'ici l'angle θ du prisme doit être déterminé par la condition que l'excès de la première force sur la seconde soit un maximum; mais cet excès exprimé par

$$p(\cos\alpha-f'\sin\alpha)$$

devient un maximum en même tems que p lui-même; ainsi, dans l'hypothèse actuelle c'est encore la plus grande poussée P que l'on a à considérer.

Cela posé, le frottement sur la base AF, provenant du poids du trapèze ABEF, est

$$f'\delta' H\left[x'-\frac{1}{2}H(\tan\alpha+\tan\varepsilon)\right]\ldots\ldots(11)$$

et la cohésion du trapèze sur cette même base a pour mesure

$$\gamma' x';$$

Or, la condition de l'équilibre consiste en ce la première quantité dans laquelle p doit être remplacé par la valeur (d) de P,

soit égale à la somme des deux autres, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}\delta h(h-h')t^2\cos\alpha(\cos\alpha-f'\sin\alpha)=f'\delta' H\left[x'-\tfrac{1}{2}H(\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\varepsilon)\right]+\gamma' x';$$

d'où l'on tire

$$x'=\frac{\delta t^2 h(h-h')(1-f'\text{tang}\,\alpha)\cos^2\alpha+\delta' f' H^2(\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\varepsilon)}{2(\delta' f' H+\gamma')},$$

valeur générale de l'épaisseur du revêtement dans l'hypothèse du glissement et eu égard à la cohésion de la maçonnerie aussi bien qu'à celle des terres. Mais d'une part, les terres avec lesquelles les revêtemens sont remblayés, ont perdu, comme nous l'avons déjà dit, toute leur cohésion; d'autre part, la maçonnerie n'acquiert la sienne qu'à la longue; il convient donc de négliger l'une et l'autre résistance ou de faire $h'=0$, $\gamma'=0$. Alors on a simplement

$$x'=H\left[\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\alpha\left(1-rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{f'}rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha+\text{tang}\,\varepsilon\right)\right]\ldots\ldots(r)$$

Comparaison des deux hypothèses; celle de la rotation est la seule qui convienne à la pratique.

38. Maintenant, il est manifeste que pour rendre le revêtement capable de résister à la poussée des terres, il faut lui donner une épaisseur au moins égale à la plus grande des deux valeurs analogues (o) et (r) de x et de x'; en sorte que si dans tous les cas que présente la pratique, la dernière de ces valeurs était moindre que la première, on pourrait s'en tenir à la seule hypothèse de la rotation.

Comme les deux expressions (o) et (r) ont le même premier terme, il suffira de comparer le radical de l'une avec le second terme de l'autre, et l'on sera autorisé à négliger la considération du glissement, pourvu que dans la pratique on ait toujours

$$\sqrt{\left[\tfrac{1}{4}\text{tang}^2\alpha\left(1-rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)^2+\tfrac{1}{3}rt^2\frac{h^3}{H^3}-\tfrac{1}{3}(\text{tang}^2\alpha-\text{tang}^2\varepsilon)\right]}>\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{f'}rt^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha+\text{tang}\,\varepsilon\right).\ (12)$$

Or, il résulte des expériences de Mr. Boistard (Traité de la construction des ponts, par Gauthey, tome 1, page 344) que la valeur de f' est au moins 0,75; d'ailleurs on a généralement dans la pratique $\frac{h}{H}<\frac{3}{2}$, $r=\frac{2}{3}$ et, si $\alpha=0$, $t^2<\frac{1}{2}$; car le talus naturel des terres dont la cohésion est détruite n'est pas moindre que 30° et son complément φ ne surpasse pas 70°; donc $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$ est moindre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est la tangente de 35° 15′ 50″.

Cela posé, nous distinguerons deux cas selon que le parement intérieur est vertical ou incliné:

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $\alpha=0$, l'inégalité devient

$$\tfrac{1}{3}\left(rt^2\frac{h^3}{H^3}+\text{tang}^2\varepsilon\right)>\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{f'}rt^2\frac{h^2}{H^2}+\text{tang}\,\varepsilon\right)^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{2}{3} f' \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{rt^2}{f'} \frac{h^2}{H^2} > \tang \varepsilon - \frac{1}{6} \frac{f'}{rt^2} \frac{H^2}{h^2} \tang^2 \varepsilon,$$

et, en substituant au lieu de f', $\frac{h}{H}$, r et t^2, leurs limites numériques,

$$\frac{1}{4} > \tang \varepsilon - \frac{1}{6} \tang^2 \varepsilon,$$

condition qui est satisfaite non seulement par $\varepsilon = 0$; mais encore par toute valeur de $\tang \varepsilon$ qui ne surpasse pas $\frac{1}{4}$; d'où l'on conclut que l'hypothèse du glissement peut être négligée dans le cas où le parement intérieur étant vertical, le parement extérieur l'est aussi ou a un talus dont la base n'excède point le quart de la hauteur, ce qui comprend tous les talus usités.

Dans le second cas, savoir, quand le parement intérieur est incliné, la conclusion subsiste encore; mais pour s'en assurer, il est plus simple de calculer immédiatement par les formules (o) et (r), les valeurs de x et de x', entre les limites de la pratique, comme on l'a fait dans le Mémorial de l'Officier du Génie (N.° 4, page 186), que de considérer l'inégalité générale (12) dont la discussion se complique beaucoup, à raison des valeurs de la quantité t ou $\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\cos \delta \cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}$.

Soit donc $\tang \delta = \pm \frac{1}{4}$, limite qu'on ne dépasse pas dans la pratique, et alternativement $\varphi = 30°$, $\varphi = 45°$, $\varphi = 60°$, valeurs qui répondent, la première aux terres fortes pour lesquelles on suppose $r = \frac{5}{6}$ et les deux autres aux terres légères et moyennes pour lesquelles on prend $r = \frac{2}{3}$. Ces rapports $\frac{5}{6}$ et $\frac{2}{3}$ sont un peu forcés relativement aux terres des qualités extrêmes, mais la conclusion n'en sera que plus certaine.

Les résultats obtenus sont rangés dans le tableau suivant,

Tangente de l'angle du talus avec la verticale		Épaisseur du revêtement en millièmes de sa hauteur H					
		$\varphi = 30°$, $r = \frac{5}{6}$		$\varphi = 45°$, $r = \frac{2}{3}$		$\varphi = 60°$, $r = \frac{2}{3}$	
$\tang \delta$	$\tang \varepsilon$	x	x'	x	x'	x	x'
$+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	479	396	539	462	630	598
$+\frac{1}{4}$	0	452	271	516	337	613	473
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	72	33	187	112	364	284
$-\frac{1}{4}$	0	8	négative	150	négative	340	159

La comparaison des deux genres de résultats montre que dans toute l'étendue des limites qui circonscrivent la pratique,

l'hypothèse du glissement donne de moindres épaisseurs que l'hypothèse de la rotation; d'où il s'ensuit que cette dernière suffit au calcul des dimensions des revêtements.

A la vérité, il n'est pas sans exemple qu'un mur de revêtement ait cédé en glissant; mais on doit remarquer que c'est la masse totale du mur et de sa fondation qui a glissé sur un sol argileux et non pas la maçonnerie sur elle-même: un pareil accident n'infirme donc pas la théorie et ne décèle qu'un vice de construction dans la fondation.

Détermination du moment de stabilité des revêtements.

39. Les formules théoriques (0),(7) et (9) fondées sur la considération de l'équilibre strict entre la poussée des terres et la résistance opposée du mur qui doit les soutenir, ne donneraient que des épaisseurs très-insuffisantes dans l'exécution, malgré qu'on ait négligé le frottement et l'adhérence des molécules terreuses le long du parement intérieur et la cohésion de ces mêmes molécules; car d'abord les deux premières forces sont de peu de valeur et la cohésion des molécules est effectivement nulle, puisque pour construire un revêtement on enlève les terres sur toute sa hauteur et jusqu'à un talus sous lequel elles se soutiennent d'elles-mêmes, c'est-à-dire, plus incliné que celui de la plus grande poussée, après quoi l'on remblaie avec des terres rapportées et qui ont perdu leur cohésion; en second lieu l'équilibre pourrait être rompu et le revêtement renversé, au moindre surcroît occasionné dans la poussée des terres, soit par la présence d'un fardeau posé à la surface, soit par quelqu'autre cause accidentelle, comme l'humidité qui change le poids des terres et leur frottement, ou la pluie qui les délaie et les fait agir à la manière des fluides, ou la gelée qui accroît leur volume et par conséquent leur pression &c. Il faut donc de toute nécessité mettre la résistance du mur au-dessus de l'équilibre, en augmentant les épaisseurs déterminées par la théorie, avant de les employer dans la pratique et c'est cette augmentation qu'il s'agit d'assigner.

Pour cela, les auteurs, notamment Bélidor et Coulomb ont usé d'un expédient qui paraît naturel; ils règlent l'augmentation de la résistance nécessaire à l'équilibre, d'après cette base que le surcroît soit dans un certain rapport avec la poussée même et ce rapport se détermine par l'expérience, comme on l'expliquera

bientôt. De cette manière le moment du revêtement excédera celui de la poussée d'une partie proportionnelle à ce dernier, et qu'on peut appeler le moment de stabilité du revêtement.

Formules pratiques.

40. En conséquence, on égalera le moment m' du revêtement, non pas, comme on l'a fait d'abord, au moment m de la poussée, mais au produit μm de ce moment multiplié par un coëfficient constant μ, ce qui reviendra évidemment à écrire μr au lieu de r dans l'équation (m) et dans celles qui en dérivent, de sorte que les formules (o), (p), (q) deviendront

$$x=H\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha\left(1-\mu r t^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)+\sqrt{\left[\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\alpha\left(1-\mu r t^2\frac{h^2}{H^2}\cos^2\alpha\right)^2+\tfrac{1}{3}\mu r t^2\frac{h^3}{H^3}-\tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}^2\alpha-\operatorname{tang}^2\varepsilon)\right]}\right\}\ldots(O)$$

$$x=H\sqrt{\left[\tfrac{1}{3}\mu r\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi\frac{h^3}{H^3}+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varepsilon\right]}\ldots\ldots(P)$$

$$x=h\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\left(\frac{\mu r}{3}\cdot\frac{h}{H}\right)}\ldots\ldots\ldots(Q)$$

Détermination du coëfficient de stabilité

41. Le coëfficient μ se déterminera par l'application de ces formules à des revêtemens d'une solidité à toute épreuve et constatée par l'expérience. Mais tous les revêtemens ne sont pas uniquement destinés, comme les murs ordinaires de terrasse, à soutenir la poussée des terres : en fortification, les escarpes doivent résister non seulement à cette poussée, mais encore aux effets destructeurs de l'Artillerie et les contre-escarpes doivent en outre être à l'épreuve des commotions souterraines, produites par le jeu des mines ; il convient donc de distinguer le cas des revêtemens de fortification, qu'il faut pourvoir d'un excès de résistance, dépendant des considérations militaires, et celui des murs ordinaires de soutènement

Dans le premier cas, les meilleurs termes de comparaison qu'on puisse choisir sont sans contredit, les revêtemens construits par Vauban, lesquels ont été éprouvés dans les sièges et ont résisté depuis un siècle à l'action des terres sous l'influence de toutes les causes accidentelles qui peuvent la modifier. Or, suivant la règle connue des Ingénieurs, sous la dénomination de profil de Vauban, on a

$$x=1^{m},624+0,2.H;$$

Mais ce profil suppose le parement intérieur vertical et le talus extérieur au cinquième ; il faut donc employer la formule (P), en y faisant $\operatorname{tang}\varepsilon=0,2$; ce qui donnera

$$x=H\sqrt{\left[\tfrac{1}{3}\mu r\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi\frac{h^3}{H^3}+0,0133\right]};$$

que l'on égale les deux valeurs de x, il résultera de l'équation ;

$$n = \frac{3}{r \tang^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{H\left[(1^m,624 + 0,2.H)^2 - 0,0133.H^2\right]}{h^3} \quad \ldots\ldots (13)$$

Soit maintenant $\varphi = 45°$, $r = \frac{2}{3}$, termes moyens déjà adoptés du temps de Vauban (Science des Ingénieurs, page 16), il viendra

$$n = 26,228.H \frac{(1^m,624 + 0,2.H)^2 - 0,0133.H^2}{h^3} \quad \ldots\ldots (14)$$

C'est dans le profil de Vauban l'expression du rapport entre le moment du revêtement et le moment de la poussée des terres.

Appliquons cette expression aux escarpes : la hauteur moyenne du plus grand nombre est $10^m = H$ et comme on peut supposer moyennement $h = H + 2^m$, on aura $n = 1,79 = 1 + \frac{4}{5}$, à un centième près ; d'où il suit que dans la plupart des escarpes de Vauban, le moment de stabilité est égal à $\frac{4}{5}$ du moment de la poussée des terres. Il paraît convenable de s'en tenir à ce résultat d'expérience et, relativement aux escarpes, d'attribuer au coëfficient, n, la valeur 1,8 avec d'autant plus de raison que les épaisseurs qui s'en déduisent diffèrent peu de celles qu'on obtient, dans les mêmes circonstances, par la règle pratique de Cormontaigne (Mayniel, page 83).

Il est à observer néanmoins que si parmi les escarpes exécutées selon le profil de Vauban, il s'en trouvait en maçonneries et terres de moyennes qualités, qui eussent 15^m de hauteur, il en résulterait $n = 1,47$, c'est-à-dire, un moment de stabilité égal à environ la moitié du moment de la poussée ; alors il suffirait de prendre $n = 1,5$ et les revêtemens construits d'après cette détermination auraient la même stabilité que les escarpes de Vauban, sous 15^m de hauteur.

En général, ce profil donne aux revêtemens un moment de stabilité d'autant moindre que leur hauteur est plus grande, en sorte que leur résistance ne se trouve pas proportionnée à la force qui tend à les renverser et c'est pour cette raison que nous avons considéré la hauteur moyenne de 10 mètres

Le défaut, qui à la vérité est en partie corrigé par la

présence des contre-forts dont les dimensions croissent avec la hauteur du mur, provient de l'invariabilité de l'épaisseur au cordon, laquelle épaisseur est constamment de 5^{pi}, quelle que soit la hauteur, ce dont on ne voit point la nécessité. Un autre défaut qu'on reproche au profil de Vauban, c'est que le talus extérieur, fixé au cinquième, est trop fort et c'est afin d'éviter les inconvéniens qui s'ensuivent que les Ingénieurs ont réduit ce talus au sixième.

Actuellement, si l'on applique l'expression (14) aux dernières contre-escarpes de Vauban, pour lesquelles on a $h = H$, $x = 0^{m},9743 + 0,2.H$ et qu'on prenne successivement, $H = 6^{m}$, $H = 7^{m}$, on obtient $n = 3,79$; $n = 3,02$; donc puisque $n = 1,79$ procure une stabilité suffisante, il s'ensuit, relativement à ces contre-escarpes, que le moment de stabilité est près de trois fois et demie trop grand, sous la hauteur de 6^{m}, et plus de deux fois et demie, sous la hauteur de 7^{m}, ce qui est contraire à l'économie (*).

Quant aux revêtemens ordinaires ou des terrasses, murs en aile, ou des quais, chaussées &c.ª qui outre la poussée des terres ont encore à supporter le poids des voitures et les secousses qu'elles occasionnent; nous nous en rapporterons à Bélidor qui ne porte le moment de stabilité qu'à $\frac{1}{4}$ et même à $\frac{1}{6}$ du moment de la poussée (Science des Ingénieurs, pages 47, 57, 89, 90). Il est vrai que par sa théorie fondée sur des hypothèses arbitraires, cet auteur trouvant des épaisseurs déjà très-fortes dans le cas de l'équilibre, n'avait pas besoin d'un grand moment de stabilité pour se rapprocher des usages de son temps; néanmoins en admettant le rapport $\frac{1}{4}$ on s'écartera assez peu de la règle suivie par les constructeurs (Rondelet, art de Bâtir) et vu les circonstances négligées dans le calcul, cet excès de $\frac{1}{4}$ au-dessus de l'équilibre paraît devoir suffire pour mettre un revêtement ordinaire à l'abri de l'influence des causes accidentelles.

En damant les terres à mesure que le remblai s'effectue, on leur procure une cohésion artificielle, dont on tiendrait

---

(*) La discussion précédente est à quelques changemens près, tirée du Mémorial (No. 4, page 172).

compte, si on le voulait, au moyen des formules (l, m) et (n), dans lesquelles on substituerait $n\,r$ au lieu de r. Alors il faudrait déterminer les quantités h', h_1 par des expériences immédiates sur les terres damées ; mais comme en général les valeurs de ces quantités sont peu considérables et que d'ailleurs elles dépendraient du plus ou moins de soin apporté à l'opération, on fera bien de négliger absolument la cohésion.

Ainsi, pour concilier autant que les diverses circonstances le permettent, l'économie et la solidité sans lesquelles il ne peut exister de bonne construction, non seulement on fera constamment h' ou h_1 nul, mais encore on admettra dans les deux cas qui ont été distingués les valeurs respectives

$$n = 1{,}80; \quad n = 1{,}25, \; \ldots\ldots \; (R)$$

des considérations particulières fixant dans le premier cas, le talus extérieur au sixième de la hauteur.

Transformation des profils de revêtement.

42. On voit par les expressions (10) et (11) que le moment m' d'un profil quelconque ABEF de revêtement, par rapport à l'arête extérieure F, est

$$m' = \tfrac{1}{2} H\left[\left(x - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha\right)^2 + \tfrac{1}{3} H^2\left(\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 \varepsilon\right)\right],$$

et que la surface S' de ce profil a pour expression

$$S' = H\left(x - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \varepsilon\right).$$

Soient m et S les valeurs de ces quantités, quand $x = b$ et $\varepsilon = e$, il viendra

$$m = \tfrac{1}{2} H\left[\left(b - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha\right)^2 + \tfrac{1}{3} H^2\left(\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 e\right)\right]$$
$$S = H\left(b - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} e\right) \ldots\ldots (15)$$

Cela posé, si H, b, e, α, ε étant donnés, on veut que le premier profil ait la même stabilité que le second, il n'y a qu'à égaler m' à m, ce qui donne

$$x - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\left[\left(b - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha\right)^2 + \tfrac{1}{3} H^2\left(\operatorname{tang}^2 \varepsilon - \operatorname{tang}^2 e\right)\right]} \ldots (S)$$

et par conséquent

$$S' = H\sqrt{\left[\left(b - \tfrac{1}{2} H \operatorname{tang} \alpha^2\right)^2 + \tfrac{1}{3} H^2\left(\operatorname{tang}^2 \varepsilon - \operatorname{tang}^2 e\right)\right]} - \tfrac{1}{2} H^2 \operatorname{tang} \varepsilon \ldots (16)$$

On peut donc au moyen de la formule (S) transformer un profil donné en un autre d'une stabilité équivalente et dont le talus extérieur soit différent. Mais il est essentiel d'observer que cette formule suppose le même talus intérieur pour les deux profils ; autrement, la poussée changerait de l'un à l'autre et alors il faudrait déduire directement de la formule (0), où l'angle α de ce talus aura telle valeur qu'on voudra, la base x du nouveau profil.

De la forme la plus avantageuse des profils de revêtement.

figure 4e.

13. La question qu'on vient de résoudre fait naître celle-ci qui a une très-grande importance dans la pratique : parmi les diverses formes qu'on peut donner au profil d'un revêtement et qui se réduisent aux six A, B, C, a, b, c, quelle est la plus avantageuse principalement sous le rapport de l'économie, c'est-à-dire, quelle est celle d'où résulte, à égale stabilité, la moindre surface du profil ?

Cette recherche dont M. Maynier s'est occupé, se simplifie par la solution de la question précédente ; supposons e=0, dans le profil primitif, ε étant quelconque dans le profil transformé et α le même dans les deux ; les formules (S), (15) et (16) deviendront

$$x-\frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha=\sqrt{\left[\left(b-\frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha\right)^2+\frac{1}{3}H^2\,\text{tang}^2\,\varepsilon\right]}\;\ldots\ldots\;(17)$$

$$S=H\left(b-\frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha\right)\;\ldots\ldots\ldots\;(18)$$

$$S'=H\sqrt{\left[\left(b-\frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha\right)^2+\frac{1}{3}H^2\,\text{tang}^2\,\varepsilon\right]}-\frac{1}{2}H^2\,\text{tang}\,\varepsilon\;\ldots\;(19)$$

Or la condition $S'<S$, qui revient à

$$\text{tang}\,\varepsilon<12\,\frac{b-\frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha}{H}\;\ldots\ldots\ldots\;(20)$$

est généralement satisfaite dans la pratique ; car on a toujours $\text{tang}\,\alpha<\frac{1}{7}$ et $\frac{b}{H}>\frac{1}{7}$; d'où $\text{tang}\,\varepsilon<\frac{3}{14}$.

Ainsi les profils A, B, C renferment respectivement moins de surface que leurs analogues a, b, c : le plus avantageux de tous se trouve donc dans les trois premiers qu'il suffira par conséquent de comparer entre eux, la formule (o) ne se prêtant point à une discussion en termes généraux, à cause de la complication occasionnée par les différentes valeurs de t.

Ces profils se calculeront, le premier par la formule (p) et les deux autres par la formule (o), dans laquelle tang α sera respectivement positif et négatif. D'ailleurs, y désignant la base supérieure du profil, on aura

$$y=x-H(\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\varepsilon),$$

$$S=\frac{1}{2}H(x+y).$$

Nous prendrons $H=10^{m}$, $h=12^{m}$, $r=\frac{2}{3}$, $\varphi=45°$; supposant successivement $\text{tang}\,\varepsilon=\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{10}$, avec $\text{tang}\,\alpha=0$, pour le profil A et $\text{tang}\,\alpha=\pm\,\text{tang}\,\varepsilon$, pour les profils B et C.

Le Tableau ci-après renferme les résultats de ce calcul ;

Valeurs de tang ε	Valeurs de S pour le Profil.		
	A, où tang α = 0,	B, où tang α est positif	C, où tang α est négatif
$\frac{1}{5}$	26^{m}, 32	28^{m}, 00	20^{m}, 90
$\frac{1}{6}$	27 , 42	29 , 15	23 , 04
$\frac{1}{10}$	29 , 92	31 , 34	27 , 51

Il prouve que la surface S du profil est moindre sous la forme A que sous la forme B et moindre encore sous la forme C : ainsi, de tous les profils de revêtement, le plus avantageux, c'est-à-dire, celui qui procurerait, à égale surface, la plus grande stabilité, ou, à égale stabilité, la plus petite surface, est le profil C lequel avec un talus extérieur surplombe vers les terres, l'avantage devenant de plus en plus grand à mesure que le surplomb devient plus considérable ; parce que la poussée des terres diminue tandis que le moment du mur augmente ; de sorte que si le talus du parement intérieur atteignait le talus naturel des terres, la surface S se réduirait à zéro.

Veut-on compléter la comparaison ? on passera des profils A, B, C à leurs analogues a, b, c, moyennant les formules (15) et (16) entre lesquelles on éliminera $b - \frac{1}{2}H\,\text{tang}\,\alpha$ et qui, dans l'hypothèse de ε = 0, donneront

$$S' = \sqrt{\left[\left(S + \tfrac{1}{2}H^2\,\text{tang}\,e\right)^2 - \tfrac{1}{3}H^4\,\text{tang}^2 e\right]},$$

tang e désignant alors le talus extérieur des premiers profils.

On obtiendra par là les résultats compris dans cet autre tableau ;

Valeurs de tang ε	Valeurs de S' correspondantes aux précédentes de tang α, pour le profil		
	a, où tang α = 0	b, où tang α = $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$	c, où tang α = $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{10}$
0,	34^{m}, 43	36^{m}, 20	28^{m}, 66
0,	34 , 43	36 , 23	29 , 86
0	34 , 43	35 , 88	32 , 00

d'où l'on conclut semblablement que la surface S' du profil est moindre sous la forme a que sous la forme b et moindre encore sous la forme c, mais de plus, que cette surface est susceptible d'un maximum, lequel est compris entre tang $\alpha = +\frac{1}{5}$ et tang $\alpha = +\frac{1}{6}$.

On voit aussi que l'une quelconque des formes A, B, C comporte moins de surface, non seulement que son analogue entre les trois a, b, c, mais même que chacune des deux non analogues. Enfin, toute forme composée de deux autres participe des propriétés de celles-ci ; c'est ainsi que la forme C qui se compose des deux formes avantageuses A et c a la supériorité absolue ; pareillement, dans la forme B qui est une combinaison des formes A, b, l'avantage dû à A est détruit en partie par le désavantage attaché à b.

figure 3e

On emploie encore une espèce de profil disposé par retraites intérieures. En général, la largeur pq est petite relativement à la hauteur qb et les sommets des angles b, p, m se trouvent sur une même droite inclinée tout au plus à $\frac{1}{5}$; et comme les terres pressent les faces horizontales mn, pq, aussi bien que les faces verticales am, np, qb, on peut, sans erreur sensible, substituer à la ligne discontinue amnpqb, la droite cd, passant par les milieux des horizontales mn, pq, vu que la pression sur cette droite se décomposera en une force horizontale et une autre verticale. Alors, on reconnaît, indépendamment de tout calcul, que le profil discontinu est moins avantageux que le profil rectiligne. En effet, pour transformer le premier dans le second il suffit de mettre chaque triangle supérieur qmh à la place de l'inférieur qac, qui lui est égal ; or, dans cette transformation, la quantité de surface est conservée, mais le moment est visiblement augmenté ; donc, à égale stabilité, le profil transformé aura moins de surface que le profil primitif.

La discussion des formes de revêtemens n'a eu pour objet que l'économie de la maçonnerie ; aussi son application à la pratique est-elle sujette à restriction. D'abord, le talus extérieur est assez limité : on a observé que les écorchemens causés par les pluies et par la végétation des plantes, se forment d'autant plus facilement que ce talus est plus fort ; ce qui

figure 6.e

en a déterminé la réduction de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{8}$, dans la fortification; ensuite, le surplomb intérieur, si favorable à l'économie, ne doit être employé qu'avec mesure: il faut non seulement que le centre de gravité du mur ne tombe point hors de la base, du côté des terres; il faut encore que le moment de la cohésion de la maçonnerie, suivant une sécante quelconque st, par rapport à l'extrémité s, surpasse le moment du poids du trapèze supérieur, par rapport au même point, sans quoi la maçonnerie s'appuyant en partie sur les terres et celles-ci s'affaissant sous la pression, il arriverait que le mur déverserait de ce côté et tout au moins se lézarderait à son parement extérieur.

Examen de la supposition que la base du mur est inébranlable.

24. Nous avons regardé la base des murs de revêtement comme incompressible et inébranlable; cependant il n'en est pas ainsi, à moins que cette base ne soit une masse de rochers, et même les murs fondés sur pilotis peuvent être renversés, si les pilotis n'ayant pas assez pénétré dans un terrain solide cèdent à la poussée des terres et s'inclinent en avant. Il est bien rare que les revêtemens viennent à manquer par un défaut d'épaisseur; mais il n'est que trop commun de les voir périr soit parce que la fondation n'a pas été construite assez solidement, soit parce qu'on n'a pas donné un empatement suffisant à cette fondation sur laquelle se reporte tout l'effort de la poussée. C'est donc une question très-importante que de déterminer les dimensions qu'il convient de donner aux fondations pour en assurer la stabilité (*)

Détermination de la largeur des fondations

figure 7.e

25. Le massif CDKi de la fondation, auquel on a coutume de donner la forme d'un parallélipipède rectangle, se trouve soumis à l'action de trois forces; savoir, son propre poids, le poids du revêtement et la poussée des terres: en vertu de cette action, il tend à glisser sur sa base et en même temps à tourner autour de l'arête extérieure K ou intérieure D de cette base. Le premier mouvement peut et doit toujours être empêché, soit par quelque moyen artificiel, soit simplement par la résistance des terres contiguës au parement extérieur des fondations. La solution de la question se déduira donc uniquement de la

(*) L'analyse de cette question se trouve dans le Mémorial (N.° 4, pag. 156).

considération du mouvement de rotation.

Si le fond sur lequel on bâtit était absolument incompressible, il suffirait que la résultante des trois forces passât dans l'intérieur de la base du massif et cette condition se trouvera toujours remplie d'elle-même, parce que le moment du poids du revêtement par rapport au point F, ayant été rendu supérieur à celui de la poussée des terres, la résultante de ces deux forces passe en deçà du point F, et comme elle doit encore se composer avec le poids du massif, la direction de la résultante finale se rapprochera encore davantage de la verticale, c'est-à-dire, fera un plus grand angle avec l'horizon.

Mais s'il arrive que le fond soit compressible et c'est le cas le plus fréquent, il faudra, en supposant la compressibilité uniforme dans toute l'étendue des fondations, que la résultante passe par le centre de figure de la base; alors les momens de cette résultante par rapport aux arêtes extérieure et intérieure seront égaux et se détruiront l'un l'autre. Or, à cause de la forme du massif, la direction de son poids passe déjà par le centre de figure de la base; tout se réduit donc à ce que la résultante du poids du revêtement et de la poussée des terres, soit dirigée à ce même centre.

Cela posé, la profondeur des fondations, en tant qu'elle dépend des circonstances locales est une quantité donnée et l'on a la position DK de la base du massif; en outre, le centre de gravité G du revêtement peut se construire graphiquement et la quantité représentative de son poids est facile à calculer; enfin, puisque la cohésion est supposée nulle, le point d'application N de la poussée répondra au tiers de la hauteur des terres et la valeur de cette poussée s'obtiendra par la formule (d) dans laquelle on fera $h'=0$. Ainsi, le poids du revêtement et la poussée des terres sont deux forces connues de grandeur et de position. Soit O le point de concours de ces deux forces et OL la direction de leur résultante; cette direction rencontrera la ligne DK en un point L et il est clair que si l'on porte DL en LK, la distance DK sera la largeur des fondations.

Il est aisé de traduire la question en analyse: il n'y a qu'à substituer les valeurs des données, dans l'équation qui exprime l'égalité entre les momens du revêtement et de la poussée, par rapport au point L, milieu de la longueur cherchée DK. L'équation n'est

que du premier degré et l'expression de DL, qu'elle fournit, étant appliquée aux profils A et a de la première espèce, pour lesquels AF est $3^m,632$ ou $3^m,443$, il vient $DL = AC + 2^m,631 + 0,313.CD$ ou $DL = AC + 2^m,678 + 0,239.CD$; de sorte qu'en supposant la retraite intérieure de $0^m,4$ seulement, la largeur de la fondation se trouve de $5^m,462 + 0,626.CD$ ou $5^m,556 + 0,478.CD$ et dépasse le pied F du parement intérieur de $1^m,730 + 0,626.CD$ ou $2^m,012 + 0,478.CD$.

Les retraites extérieures ainsi déterminées excèdent beaucoup celles qui sont en usage, et s'il n'arrive pas plus d'accidens aux revêtemens, cela doit être attribué soit à la présence des contreforts, soit à l'attention qu'on a de pénétrer jusqu'au terrain ferme, soit enfin à ce que, à force d'art et de dépense, on rend le fond comme incompressible.

On devra donc comparer la dépense qu'il faudrait faire pour donner au terrain le degré d'incompressibilité nécessaire, avec celle qu'exigeraient des fondations construites d'après les principes précédens; ce qui déterminera le choix entre les deux procédés, sur le dernier desquels il est encore à observer que l'épaisseur CD soit proportionnée à la largeur DK, sans quoi, à cause de l'inégale compressibilité dans les différens points, le massif pourrait s'ouvrir en-dessous en s'affaissant au milieu et entraîner ainsi la chute du revêtement.

Moyen de diminuer l'excès de cette largeur.

46. Cette excessive largeur des fondations a fait naître l'idée de chercher à la diminuer, en donnant un talus iK' au parement opposé à la poussée et ne conservant qu'une retraite extérieure, égale à l'intérieure. Comme alors le centre de gravité du massif ne répond plus au centre de figure I de la base, son poids se combine avec les deux autres forces, ce qui diminue effectivement la grandeur de DL. Il est évident que c'est la différence des momens du profil ABEF et du triangle iK'K', qu'on doit égaler au moment de la poussée. Mais parce que l'équation du second degré qu'on obtient par là, se trouve trop compliquée, vu le grand nombre de données, et que la formule qui en résulte n'est pas d'un usage assez facile, nous nous dispenserons de la rapporter ici (voyez le 9e. cité du mémorial). Au lieu de se servir de cette formule, il sera beaucoup plus simple et suffisamment exact de déterminer, comme précédemment, les forces OP, OQ et de

construire ensuite le point K', au moyen d'une courbe d'erreurs. Ayant pris une distance arbitraire Dd, on cherchera le centre de gravité du trapèze CD di dont on calculera le poids; on construira la résultante de ce poids et des forces OP, OQ; soit f le point où sa direction rencontre DK, on portera la différence Df - fd sur la perpendiculaire de, d'un côté ou de l'autre par rapport à DK, selon que cette différence sera positive ou négative et trois opérations semblables détermineront la petite courbe ee', dont l'intersection avec DK donnera le point cherché K'.

Examen de la supposition que le mur est d'une seule pièce.

27. Non seulement nous avons regardé la base du revêtement comme inébranlable, mais encore nous avons supposé que ce revêtement lui-même était une seule masse continue, dont les parties ne se sépareraient point dans le mouvement qu'il prendrait en cédant à la poussée des terres; il est nécessaire d'examiner aussi cette hypothèse.

D'abord, la partie inférieure du mur est la seule qui fasse difficulté; car suivant l'expérience, la partie supérieure tombe tout d'une pièce, lors même que le mur est construit en pierres sèches. Mayniel rapporte, page 97 de son traité, que des murs de 1m,5 de hauteur au-dessus du sol et de 0m,5 d'épaisseur, bâtis en briques, non seulement avec du mortier de trass, qui a la propriété de sécher promptement, mais encore avec du mortier ordinaire et même sans aucun mortier, ne se sont rompus que par le bas, et, ce qui est bien remarquable, dans la direction du talus d'éboulement.

Il ajoute qu'un mur de 20pi de hauteur (lequel devait avoir au moins 4pi d'épaisseur) et dont on avait laissé consolider la maçonnerie, s'est brisé au niveau du sol, pareillement dans la direction du talus d'éboulement ou à peu près suivant la diagonale du carré construit sur l'épaisseur; mais il fait observer que les terres vierges avaient été déblayées à l'extérieur du mur, tandis qu'à l'intérieur elles étaient restées à leur sol naturel. Quant à la partie inférieure, si le mur a une certaine épaisseur et si les mortiers n'ont pas eu le temps de prendre corps ni de lier suffisamment entre elles toutes les parties de la maçonnerie, il est vraisemblable que dans le mouvement de rotation du mur ABEF autour de l'arête extérieure F de sa base, il restera sur cette base un prisme AFQ, qui ne sera point soulevé avec la partie supérieure du mur.

figure 8e.

La détermination de ce prisme appartiendrait à la théorie de la résistance des supports en maçonnerie, que nous exposerons plus loin. Mais, outre qu'on ne connaît pas bien la valeur de la cohésion des maçonneries, laquelle est si sujette à varier par la nature des matériaux, la manière de construire, le temps écoulé depuis l'exécution du travail, la saison et le climat même dans lesquels il est exécuté, cette théorie ne convient pas bien aux murs de revêtement parce qu'on y regarde la pression des terres comme une force simple et, eu égard toutefois au changement de bras de levier, comme appliquée au sommet du revêtement, tandis qu'elle est au contraire répandue sur tous les points du parement intérieur; de sorte qu'à l'instant de la rupture de l'équilibre, le seul qu'il faille considérer, la pression exercée contre la face A2R est une force qui ne doit pas être omise dans la détermination du prisme. A quoi l'on peut ajouter que cette pression ainsi disséminée produit entre les parties du mur un frottement qui s'oppose à leur disjonction; ce qui explique comment le mur se renverse en masse, quoiqu'il soit bâti sans mortier.

Au reste, comme en établissant les formules définitives nous avons fait abstraction de la cohésion des terres et que nous avons donné au revêtement un moment de stabilité assez fort, il ne sera pas à craindre que la poussée l'emporte dans les premiers momens sur sa résistance; à plus forte raison, si l'on dame les terres du remblai à mesure qu'on l'effectue derrière lui ou si on laisse à la maçonnerie le temps d'acquérir quelque degré de cohésion; dès-lors, le moment de stabilité augmentera en approchant de son terme, à proportion que les terres tasseront et que le mur prendra plus de consistance.

Concluons de là que, sur-tout avec les précautions dont on vient de parler, l'hypothèse en question est en général admissible et qu'il n'y a aucune diminution à faire au volume du revêtement, fût-il construit en pierres sèches.

Les expériences citées prouvent aussi qu'un revêtement ne cède jamais qu'en tournant autour de l'arête extérieure de sa base et non en glissant sur cette base, ce qui avait déjà été démontré par le calcul.

Des Contre-forts.

48. Dans la fortification principalement, on construit les revêtemens avec des contre-forts intérieurs, distribués sur toute leur

longueur et qui ajoutent beaucoup à leur solidité. Or la liaison de la maçonnerie de ces massifs avec celle du mur ne paraît pas pouvoir être jamais assez forte, ou les dimensions qu'on a coutume de leur donner, pour permettre qu'ils se soulèvent tout entiers avec lui dans son mouvement de rotation autour de l'arête extérieure de la base commune; on ne saurait donc évaluer avec un peu d'exactitude l'effet produit par ces contre-forts, qu'en faisant entrer en considération la force de la cohésion qui s'oppose à la séparation des parties du système, recherche sujette aux mêmes difficultés que la précédente, et qui fera partie de la théorie des voûtes.

En fortification, on déterminera tout simplement les épaisseurs des revêtemens d'escarpe, par les formules établies; les contre-forts ajoutés procureront un surcroît de solidité, très-utile relativement aux considérations militaires dont nous avons parlé et auront encore l'avantage important de diminuer l'étendue des brèches. La figure, les dimensions et la disposition de ces contre-forts seront d'ailleurs conformes aux règles prescrites par Vauban. Ainsi, l'espacement sera de 18.pi de milieu en milieu, ou de 15pi si le rempart doit être surchargé; la hauteur d'escarpe étant supposée de 10pi, ils auraient 4pi de longueur, autant de largeur, à la racine, et les deux tiers à la queue, proportion constante; ensuite, pour chaque augmentation de 10pi dans la hauteur d'escarpe, cette longueur augmentera de 2pi et la largeur à la racine de 1pi seulement. L'excès de largeur à la racine sur la largeur à la queue est motivé par une plus grande adhérence du contre-fort avec le revêtement.

Des revêtemens en décharge

49 On a imaginé un genre de construction de revêtement, qui mérite d'être remarqué: on adosse au mur, du côté des terres, un ou plusieurs rangs d'arcades ou d'arceaux auxquels les contre-forts servent de pieds-droits, c'est ce qu'on appelle voûtes en décharge. Les larges retraites que forment ces rangs de voûtes portent une partie des terres dont ils interrompent ainsi la poussée et ces arceaux augmentent le bras de levier de la résistance dans un plus grand rapport que la masse de maçonnerie; de sorte que cette disposition qu'on peut varier d'une infinité de manières se prête à une grande économie de matériaux. D'ailleurs ces voûtes, au moyen d'un mur de masque, opposé aux terres, deviennent des souterrains ou des casemates dont on tire un parti très-avantageux dans une ville de guerre. (Voyez sur ce sujet, le traité de Magniel.)

Notes

sur les N.os 4 et 8.

(I) Les principes sur lesquels la théorie de la poussée des terres est fondée, exigent quelques éclaircissements.

1. Dans les fluides quelconques le degré de fluidité dépend tant de la cohésion que du frottement des molécules entre elles; et comme par rapport à leur nature les fluides imparfaits participent des corps solides et des fluides proprement dits, il doit en être de même par rapport aux lois de leur équilibre.

figure 9.e

2. Soit ABCS la section transversale d'un vase rectangulaire, indéfiniment long et rempli d'un fluide imparfait qui ait une certaine adhérence avec les parois AB, CS: la pression et par conséquent le frottement du fluide contre ces parois, varieront; il est vrai, d'un point à l'autre de la hauteur; mais on obtiendra évidemment la valeur de ce frottement, en multipliant la somme des pressions par le rapport du frottement à la pression.

3 Désignons par q le poids de la masse fluide ABCS; par r la résistance absolue, provenant de la cohésion et du frottement propres du fluide, sur la section xz, et par r' la résistance absolue, provenant de l'adhérence et du frottement sur l'une ou l'autre paroi AB, CS: supposons que le fond AS vienne à céder, il est clair que si $r'=0$, quel que soit r, ou si $r=0$, quel que soit r'; rien ne s'opposera à l'action du poids q; mais que si r est ou n'est pas moindre que r', le poids q sera retenu avec une force contraire; égale à $2r$ ou $2r'$ respectivement; de sorte que dans ces deux cas, la pression que souffre le plan AS, supposé immobile, est seulement $q-2r$ ou $q-2r'$, et l'on conçoit que cette pression se répartit uniformément sur AS.

4. On parvient au même résultat par la décomposition de la masse ABCS, en tranches élémentaires, verticales, telles que $xzz'x'$. Le fond du vase venant à céder, la partie $xzSC$, regardée pour un moment comme non pesante, ne sera retenue qu'avec une force r' dirigée suivant SC, et conséquemment ne pourra elle-même retenir l'autre partie AB xz, qu'avec une force égale r', dirigée suivant zx; ainsi cette partie AB xz sera retenue par deux forces dirigées

respectivement suivant AB et zx ; mais elle ne peut être retenue suivant zx avec une force r', sans que, en vertu de la réaction, la partie contiguë xz SC ne soit tirée suivant xz, avec une force égale r' ; d'où il suit que cette partie xz-SC, à laquelle nous restituons son poids, sera tirée suivant xz et retenue suivant SC avec des forces égales à r'. Il en sera des deux parties AB x'z', x'z'SC, comme des deux AB xz, xz SC, et, par conséquent, de la tranche élémentaire xzz'x', comme de la partie xz SC ; donc en nommant dp la pression sur la base zz', on aura $dp = dq$, et en intégrant, $p = q + A$. Nous déterminerons tout-à-l'heure la constante A.

5. Remarquons d'abord que c'est par le moyen de la force intérieure r, que la force extérieure r', appliquée suivant SC, se transmet de proche en proche aux tranches élémentaires, et en quantité égale à r' même, si r n'est pas moindre que r' ; mais seulement à r, si r est moindre que r'. Pareille remarque dans le cas où les parois AB, SC étant inclinées, les tranches seraient parallèles à l'une de ces parois.

6. La détermination de la constante A demande quelque attention : à la vérité, il répondra à chacune des parois extrêmes SC, AB, une tranche SCcs, ABba, dont le poids q' ferait équilibre à la force r', si r n'est pas moindre que r ; ou, dans le cas contraire, à la force r (N.° 3) appliquée suivant SC et AB ; mais il ne faut pas en inférer que p soit nul, quand $q = q'$; quoiqu'il en provienne $p = q - 2r'$ ou $p = q - 2r$; car il s'ensuivrait que les parties Aa, Ss du fond n'éprouveraient point de pression, ce qui n'a lieu qu'autant que la largeur AS n'excède pas Aa + Ss, tandis que si AS surpasse Aa + Ss, les deux tranches extrêmes sont entraînées par la partie intermédiaire abcs qui est liée avec elles par la cohésion. La constante A doit donc être déterminée par la considération que p et q sont nuls en même tems et que la valeur complette de p répond à $q - 2r'$ ou $q - 2r$; de là $A = 0$, et $p = q - 2r'$ ou $p = q - 2r$, comme on l'a trouvé en premier lieu (N.° 3).

figure 10.e

7. Que le profil du vase ait la figure d'un triangle rectangle ABH, dont le côté AH soit vertical et que l'on considère encore une tranche élémentaire, verticale, xzz'x' ; on mènera les horizontales zo, z'o' et le raisonnement du N.° 4 s'appliquera

à chacune des parties $BHox$, $BHo'x'$ du fluide, c'est-à-dire, que les deux forces dues tant à l'adhérence qu'au frottement, sur Ho et sur Ho', se transmettront respectivement aux prismes Bxz, $Bx'z'$, par le moyen de la force interne, supposée au moins égale à la force extérieure; d'où il suit que la tranche $xzz'x'$ sera tirée suivant xz par la force relative à Ho et retenue suivant $z'x'$ par la force relative à Ho'. Cette remarque susceptible de la même extension que la précédente est très-essentielle.

figure 11ᵉ

8. Donnons enfin au profil du vase la figure d'un triangle quelconque ABS et cherchons les pressions que le fluide exerce sur les parois AB, AS, en supposant que l'adhérence et le frottement sur la dernière AS, soient les mêmes que dans le fluide.

9. Nous répondrons d'abord la question en regardant ABS comme un solide qui éprouverait sur les plans inclinés AB, AS, les mêmes résistances que le fluide imparfait.

On pourrait décomposer le poids du prisme en deux forces faisant avec la verticale des angles arbitraires, et chacune de celles-ci en deux nouvelles forces; la première, normale, la seconde parallèle à l'un des plans AB, AS: l'indétermination des angles permettrait d'égaler la composante parallèle à chaque plan avec la résistance totale suivant ce même plan; on aurait ainsi deux équations au moyen desquelles on éliminerait ces angles de la valeur de la pression cherchée. Cette méthode est très-propre à faire concevoir comment s'engendrent les pressions normales, supportées par les plans AB, AS; mais il sera plus simple de ramener le système à l'état d'un corps libre.

Désignons par q le poids du prisme; par α et par θ les angles BAH, BAS; par p', p les pressions normales aux plans AS, AB; par f, f' les rapports des frottemens aux pressions; par c, c' la cohésion et l'adhérence sur ces plans; enfin par r, r' les résistances totales suivant ces mêmes plans, de sorte que $r = fp' + c$, $r' = f'p + c'$.

Il y aura équilibre entre les forces p, p', q, r, r', appliquées, si l'on veut, au centre de gravité du prisme, pourvu que la somme de leurs composantes horizontales et celle de leurs composantes verticales soit nulles chacune en particulier, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} p\cos\alpha - p'\cos(\theta-\alpha) + r\sin(\theta-\alpha) - r'\sin\alpha = 0, \\ p\sin\alpha + p'\sin(\theta-\alpha) + r\cos(\theta-\alpha) + r'\cos\alpha - q = 0. \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

d'où l'on tire en mettant pour r et r' leurs valeurs,

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{q[\cos(\theta-\alpha) - f\sin(\theta-\alpha)] - c - c'(\cos\theta - f\sin\theta)}{\sin\theta + f\cos\theta + f'(\cos\theta - f\sin\theta)} \\ p' &= \frac{q(\cos\alpha - f\sin\alpha) - c' - c(\cos\theta - f\sin\theta)}{\sin\theta + f\cos\theta + f'(\cos\theta - f\sin\theta)} \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

10 Maintenant, pour avoir égard à la fluidité du prisme, décomposons-le en tranches par des plans parallèles à AB: en vertu du principe (N.° 5), chaque tranche élémentaire $xzz'x'$ sera retenue dans le sens zx et tirée dans le sens contraire $x'z'$, avec des forces respectivement proportionnelles à xz, $x'z'$ et non pas à la cohésion et au frottement internes du fluide, mais à l'adhérence et au frottement sur AB.

Ainsi, appliquant au prisme quelconque Sxz, la notation précédente et observant qu'alors le poids de l'élément $xzz'x'$ est exprimé par dq; la pression et la cohésion sur la base zz', par dp' et dc; les pressions sur les faces zx et $x'z'$, par p et $p+dp$; les résistances suivant ces mêmes faces, par $f'p+c'$ et $f'(p+dp)+c'+dc'$; en sorte que les composantes horizontales et verticales des forces appliquées à l'élément dont il s'agit seront

horizontales; + dans le sens BS. $\{-p\cos\alpha,\ +(p+dp)\cos\alpha,\ -dp'\cos(\theta-\alpha),\ +(fdp'+dc)\sin(\theta-\alpha),\ +(f'p+c')\sin\alpha,\ -[f'(p+dp)+c'+dc']\sin\alpha;$

verticales; + dans le sens HA. $\{+p\sin\alpha,\ -(p+dp)\sin\alpha,\ -dp'\sin(\theta-\alpha),\ -(fdp'+dc)\cos(\theta-\alpha),\ +(f'p+c')\cos\alpha,\ -[f'(p+dp)+c'+dc']\cos\alpha,\ +dq;$

on trouvera pour les conditions d'équilibre de cet élément, précisément les différentielles des équations (1) et (2), c'est-à-dire),

$$\left.\begin{aligned} dp\cos\alpha - dp'\cos(\theta-\alpha) + (fdp'+dc)\sin(\theta-\alpha) - (f'dp+dc')\sin\alpha &= 0, \\ -dp\sin\alpha - dp'\sin(\theta-\alpha) - (fdp'+dc)\cos(\theta-\alpha) - (f'dp+dc')\cos\alpha + dq &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

dont l'intégration reproduira les premières, chacune à une constante près, mais qui sera nulle, parce que $p=0$, $q=0$, $r=0$, $r'=0$, simultanément; ce qui s'explique comme au N.° 6.

11 Supposons que le plan AB soit vertical ou qu'il s'agisse du prisme AHS, nous aurons $\alpha=0$, et les formules (2) deviendront

$$p = \frac{(q-c')(\cos\theta - f\sin\theta) - c}{\sin\theta + f\cos\theta + f'(\cos\theta - f\sin\theta)}, \quad r' = \frac{q - c' - c(\cos\theta - f\sin\theta)}{\sin\theta + f\cos\theta + f'(\cos\theta - f\sin\theta)} \ldots\ldots (3)$$

12. Si la cohésion, l'adhérence et les frottemens étaient nuls ou que la fluidité fût parfaite, les expressions (2) et (3), à cause de

$BS = AB\dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta-\alpha)} = AS\dfrac{\sin\theta}{\cos\alpha}$ et de $HS = AS\sin\theta = AH\,\text{tang}\,\theta$; d'où

$q = \frac{1}{2}AH.AB\dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{1}{2}AH.AS\dfrac{\sin\theta}{\cos\alpha}$ et $q = \frac{1}{2}AH.AS\sin\theta = \frac{1}{2}\overline{AH}^2\,\text{tang}\,\theta$,

se réduiraient respectivement à

$p = AB.\frac{1}{2}AH$, et $p = AS.\frac{1}{2}AH$,

$p' = AS.\frac{1}{2}AH$; $p' = AH.\frac{1}{2}AH$.

13. On tire de là les conclusions; 1.° quoique le mode de répartition de la pression sur les plans AB, AS dépende de la nature du fluide; cependant, pour les fluides imparfaits, la grandeur absolue de cette pression est indépendante du degré de fluidité et elle est la même que si, toutes choses d'ailleurs égales, la masse était solide; 2.° pour les fluides proprement dits, la grandeur absolue de la pression sur le plan AB ou AS, ne dépend, toutes choses d'ailleurs égales, que l'étendue de ce plan et de la distance de son centre de gravité au niveau supérieur; 3.° si les résistances sur AB et AS sont nulles, il faudra toujours, quelle que soit la fluidité du prisme ABS, fût-elle parfaite, la même force perpendiculaire à AB, pour soutenir ce prisme sur le plan incliné AS ou réciproquement; et c'est ce qu'on trouve directement; car l'équation d'équilibre est $p\sin\theta = q\cos(\theta-\alpha)$; or, Δ exprimant la densité du fluide, $q = \frac{1}{2}\Delta\overline{AH}^2 \frac{\sin\theta}{\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)}$; donc $p = \frac{1}{2}\Delta AH\frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\Delta AH.AB$.

figure 12.e

14. Nous pouvons actuellement déterminer en général la nature de la courbe AS: nous avons $dc = \gamma ds$, $dc' = \gamma' dz$, $dq = \Delta\cos\alpha.z dx$ et le triangle différentiel nzz' donne $\cos(\theta-\alpha) = \frac{dz\cos\alpha}{ds}$; d'où $\sin(\theta-\alpha) = \frac{dx - dz\sin\alpha}{ds}$; en substituant ces valeurs dans les équations (a) et éliminant $\frac{dp'}{ds}$ nous trouverions l'expression de dp. Mais nous y parviendrons bien plus simplement en substituant dans la différentielle de l'expression (8) de p, prise par rapport à c, c', q, les valeurs précédentes de dc, dc', $\sin(\theta-\alpha)$, $\cos(\theta-\alpha)$ et celles-ci

$$\sin\theta = \frac{dx\cos\alpha}{ds},\ \cos\theta = \frac{dz - dx\sin\alpha}{ds},\ ds^2 = d^2x + dz^2 - 2dxdz\sin\alpha,$$

données encore par le triangle différentiel nzz'. Il y a plus, c'est que comme on a entre les coordonnées obliques x, z et les coordonnées rectangulaires u, v, les relations, $u = x - z\sin\alpha$, $v = z\cos\alpha$; d'où $du = dx - dz\sin\alpha$, $dv = dz\cos\alpha$ et $dx = \frac{du\cos\alpha + dv\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $dz = \frac{dv}{\cos\alpha}$; ce qui produit $dc = \gamma ds$, $dc' = \frac{\gamma' dv}{\cos\alpha}$, $dq = \frac{\Delta v(du\cos\alpha + dv\sin\alpha)}{\cos\alpha}$, $\sin(\theta-\alpha) = \frac{du}{ds}$, $\cos(\theta-\alpha) = \frac{dv}{ds}$, $\sin\theta = \frac{du\cos\alpha + dv\sin\alpha}{ds}$, $\cos\theta = \frac{dv\cos\alpha - du\sin\alpha}{ds}$, $ds^2 = du^2 + dv^2$; on passera immédiatement des unes aux autres coordonnées, par la substitution de ces dernières valeurs, et si remettant x, z au lieu de u, v, on fait $d\alpha$

négatif, afin de changer le sens des x positives et qu'enfin on pose $dz = m\,dx$, on obtiendra

$$p = \int \frac{\gamma + \Delta f z + [\gamma'(f + \tang\alpha) + \Delta z(1 - f\tang\alpha)]m + [\gamma + \gamma' - (\gamma' f + \Delta z)\tang\alpha]m^2}{\{1 - ff' - (f + f')\tang\alpha - [(1 - ff')\tang\alpha + f + f']m\}\cos\alpha}\,dx \ldots (b)$$

expression dans laquelle on pourra supposer l'origine en un point quelconque de BS et particulièrement en H.

Représentons par V le coëfficient de dx, la condition du maximum de p sera $\delta\int V\,dx = 0$; mais on a $\delta\int V\,dx = \int\delta(V\,dx) = \int V\,d\delta x + \int dx\,\delta V = V\,dx + \int(dx\,\delta V - dV\,\delta x)$, en intégrant par parties; d'ailleurs, si l'on fait, pour abréger, $L = \frac{dV}{dz}$, $M = \frac{dV}{dm}$, il viendra $dV = L\,dz + M\,dm$, $\delta V = L\,\delta z + M\,\delta m$, et parce que $\delta m = \frac{d\delta z - m\,d\delta x}{dx}$, on aura $\delta\int V\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$V\,dx + \int(L\,dx\,\delta z - L\,dz\,\delta x - M\,dm\,\delta x + M\,d\delta z - M\,m\,d\delta x)$;
ainsi, en intégrant encore par parties, on obtiendra pour la variation définitive,

$$(V - Mm)\delta x + M\delta z + \int(L\,dx - dM)\delta z - \int(L\,dz - m\,dM)\delta x = 0 \ldots\ldots (c).$$

Or, 1° les termes affectés du signe $\int$ donnent l'un comme l'autre

$$L\,dx - dM = 0;$$

c'est donc l'équation de la courbe cherchée: substituant au lieu de L sa valeur tirée de $dV = L\,dz + M\,dm$, on trouvera l'équation équivalente,

$$V - Mm = C \ldots\ldots (4)$$

2° la partie délivrée du signe $\int$ fournit l'équation

$$(V - Mm)\delta x + M\delta z = 0 \ldots\ldots (d)$$

soit x', z' et x'', z'' les coordonnées des deux points extrêmes S et A de la courbe; comme le premier est variable sur l'axe HC des x et que le second est fixe sur l'axe HA des z, on aura $z' = 0, \delta z' = 0$; $x'' = 0$, $z'' = AH = h$, $\delta x'' = 0$, $\delta z'' = 0$, et par conséquent

$$V' - M'm' = 0 \ldots\ldots (5)$$

c'est-à-dire, ce que devient l'équation (4) quand on y fait $C = 0$ et $z = z' = 0$, $m = m' = \frac{dz'}{dx'}$; d'où l'on conclut immédiatement que dans l'équation (4) la constante C demeure nulle.

Cela posé, si l'on représente par P, Q, R et par A, B les coëfficients de m, dans le numérateur et dans le dénominateur de V, abstraction faite du facteur constant $\cos\alpha$, qui s'efface, on verra facilement que les équations (4) et (5) reviennent aux deux

$$(AR + BQ)m^2 + 2BPm - AP = 0 \ldots (6)$$

$$(AR' + BQ')m'^2 + 2\gamma Bm' - \gamma A = 0 \ldots (7)$$

dont les développemens, où l'on écrira t pour tang α, seront

$$\{[f(\gamma f'-\gamma' f)-(\gamma'+\Delta f'z)](1+t^2)-(\gamma+\Delta fz)[ff't^2-(f+f')t+1]\}m^2-2(\gamma+\Delta fz)[(1-ff')t+f+f']m+(\gamma+\Delta fz)[1-ff'-(f+f')t] \ldots\ldots (e)$$

$$\{\gamma[1-ff'-(f+f')t]+\gamma'(1+f^2)(1+t^2)\}m'^2+2\gamma[(1-ff')t+f+f']m'-\gamma[1-ff'-(f+f')t]= \ldots\ldots\ldots (f)$$

15. Il s'agit d'intégrer l'équation (e); mais comme sa généralité rend ses coëfficients fort compliqués, nous la restreindrons d'abord à l'hypothèse $\alpha=0$, qui simplifiera les calculs sans en changer le procédé. Alors elle deviendra

$$[\gamma+\gamma'-f(\gamma f'-\gamma' f)+(f+f')\Delta z]m^2+2(f+f')(\gamma+\Delta fz)m-(1-ff')(\gamma+\Delta fz)=0 \ldots (g)$$

et donnera

$$\Delta z=-\frac{[\gamma+\gamma'-f(\gamma f'-\gamma' f)]m^2+2\gamma(f+f')m-\gamma(1-ff')}{(f+f')m^2+2f(f+f')m-f(1-ff')},$$

expression dont le dénominateur résulte du numérateur par la substitution de f, f' au lieu de γ, γ'; en sorte que les racines de celui-ci égalé à zéro, étant

$$\frac{-\gamma(f+f')\pm\sqrt{(1+f^2)[\gamma^2(1+f'^2)+\gamma\gamma'(1-ff')]}}{\gamma+\gamma'-f(\gamma f'-\gamma' f)} \ldots\ldots (8)$$

celles de l'autre seront

$$-f\pm\sqrt{\frac{f(1+f^2)}{f+f'}} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Nous désignerons les premières par a, a'; les secondes par b, b'; la quantité $\dfrac{\gamma+\gamma'-f(\gamma f'-\gamma' f)}{f+f'}$ par F et il viendra

$$\Delta z=-F\frac{(m-a)(m-a')}{(m-b)(m-b')} \ldots\ldots\ldots (10)$$

D'ailleurs, l'équation $\dfrac{dz}{dx}=m$ ou $\Delta\, dx=\dfrac{\Delta dz}{m}$, intégrée par parties produit

$$\Delta x=C'+\frac{\Delta z}{m}+\int\frac{\Delta z\, dm}{m^2} \ldots\ldots\ldots (11)$$

on a par conséquent

$$\Delta x=C'+\frac{\Delta z}{m}-F\int\frac{m^2-(a+a')m+aa'}{m^2(m-b)(m-b')}dm \ldots (12)$$

Pour intégrer cette fraction rationnelle, on la décomposera en fractions partielles $\dfrac{A}{m^2}+\dfrac{A'}{m}+\dfrac{B}{m-b}+\dfrac{B'}{m-b'}$ dont il sera aisé d'évaluer les numérateurs; l'intégrale sera $-\dfrac{A}{m}+A'l.m+Bl.(m-b)+B'l.(m-b')$; on aura donc

$$\Delta x=C'+\frac{\Delta z-AF}{m}-F[A'l.m+Bl.(m-b)+B'l.(m-b')] \ldots (13)$$

et en éliminant m entre les équations (g) et (13) on obtiendra celle de la courbe cherchée.

16. Dans l'hypothèse présente, les racines de l'équation (f), se réduisent aux valeurs (8) et l'on a

$$m'_{\circ} = \alpha\,,\quad m' = \alpha'\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

détermination qui, comme on l'a vu (13.14), rend la constante C nulle. Quant à la constante C', elle sera déterminée d'après la condition que la courbe passe par le point fixe A.

17. On obtiendra la valeur maximum P de p, en substituant dans l'expression (b), au lieu de m et de z leurs valeurs tirées de l'équation (f) et de celle de la courbe; ensuite on prendra l'intégrale entre ses limites.

18. Nous avons supposé le point A fixe sur l'axe HA; s'il eût été variable sur cet axe, de même que le point B, sur HC, nous eussions eu semblablement $x''=0, \delta x''=0$; et l'équation déterminée (d) fût devenue $M''=0$, c'est-à-dire,

$$BR''m''^2 - 2AR''m'' - (A\mathfrak{Z}'' + BP'') = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, (h)$$

Faisant ensuite $x = x'' = 0$, $z = z''$, $m = m''$ dans (e), on aurait une seconde équation entre z'', m'', et l'élimination de m'' entre les deux, déterminerait z''; par conséquent la constante C', qui est donnée en fonction de z'' par l'équation de la courbe.

On trouverait ainsi deux valeurs pour z'', l'une négative et étrangère à la question, l'autre positive et à laquelle répondrait le minimum du maximum de p; de sorte que le maximum relatif, répond à $z''=h$. Ces généralités seront éclaircies dans les cas particuliers que nous allons discuter.

19. Maintenant supposons $\gamma=0$, $f=0$, α demeurant quelconque, c'est l'hypothèse admise dans la théorie que nous avons exposée: les équations (e) et (f) dont la première devient divisible par le facteur $\gamma + \Delta f z$, se réduisent l'une et l'autre à celle-ci

$$m^2 + 2\,\frac{f+t}{1-ft}\,m - 1 = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, (15)$$

si ce n'est que m' y remplace m, pour la seconde. Cette équation appartient évidemment à la ligne droite et son intégrale qui est

$$\left[z - C' - x\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\right]\left[z - C' + x\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\right] = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, (16)$$

exprime deux droites perpendiculaires entre elles; la même équation donne

$$m = m' = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha) \text{ et } m' = -\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (17)$$

En effet, $-\frac{f+t}{1-ft} \pm \sqrt{1+\left(\frac{f+t}{1-ft}\right)^2} = -\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)} \pm \frac{1}{\sin(\varphi-\alpha)} =$

$\frac{1-\cos(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)}$ et $-\frac{1+\cos(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)} = \text{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)$ et $-\cot\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)$.

20. Des deux droites données par l'équation (16) la seconde divise en deux parties égales, l'angle entre le plan AB et le talus que le fluide affecterait, si sa cohésion était détruite; elle seule satisfait à la question.

21. Ces résultats, indépendants de la cohésion, demeurent par conséquent les mêmes, lorsqu'on fait en outre $\gamma'=0$, ce qui est le cas usuel de la pratique; mais si c'est $\alpha=0$, qu'on suppose en outre, ou le plan AB vertical, ils deviennent

$$m^2+2fm-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$(z-C'-x\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)(z-C'+x\cot\tfrac{1}{2}\varphi)=0 \quad \ldots\ldots (19)$$

$$m'=\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \text{ et } m'=-\cot\tfrac{1}{2}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

22. Dans l'hypothèse $\gamma'=0$, $f=0$, $\alpha=0$, l'expression (b) se réduit à

$$p=\int\frac{\gamma(1+m^2)+\Delta(f+m)z}{1-fm}\,dx;$$

or, $m=-\cot\frac{1}{2}\varphi$, $x=h-z\cot\frac{1}{2}\varphi$; d'où $dx=-dz\,\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$, $1+m^2=\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}$, $f+m=-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}$, $1-fm=\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}$; ainsi, en substituant ces valeurs et intégrant entre les limites $z=0$, $z=h$, on obtiendra

$$P=\tfrac{1}{2}\Delta h\left(h-\frac{4\gamma}{\Delta\,\text{tang}\frac{1}{2}\varphi}\right)\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

c'est la formule (d') du texte.

23. En supposant d'avance le point A, fixe sur l'axe HA, nous avons eu immédiatement $z''=C'=h$; mais s'il était regardé comme variable sur HA, il faudrait employer l'équation déterminée (h), qui devient ici

$$\gamma(fm''^2-2m''-f)-(1+f^2)\Delta z''=0 \quad \ldots\ldots (21)$$

or, de son côté, l'équation (15) devient

$$m''^2+2fm''-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

et réduit la précédente à $-(1+f^2)(2\gamma m''+\Delta z'')=0$; d'où $z''=-\frac{2\gamma}{\Delta}m''$, c'est-à-dire,

$$z''=-\frac{2\gamma}{\Delta}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi,\quad z''=\frac{2\gamma}{\Delta}\cot\tfrac{1}{2}\varphi \quad \ldots\ldots (23)$$

par la substitution des valeurs $m''=\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$, $m''=-\cot\frac{1}{2}\varphi$ tirées de (22).

On sait qu'en général l'équation indéterminée, telle que (4), donne indifféremment le maximum ou le minimum relatif de l'intégrale que l'on considère, tandis que quand les limites sont variables, l'équation déterminée, telle que (d), fournit soit le maximum ou le minimum absolu, soit le maximum du minimum ou réciproquement: c'est dans ce dernier cas que tombe la valeur $z'' = \frac{2\gamma'}{\Delta} \cot\varphi$, la seule qui convienne à la question. En effet, que l'on différencie l'expression de P en fonction de z'', par rapport à cette variable, on trouvera $z'' = \frac{2\gamma'}{\Delta \tang \frac{1}{2}\varphi}$ ou la moitié de la valeur de h, laquelle valeur rend P nul, mais non un minimum. On voit d'ailleurs que P augmente avec z''; de sorte que son maximum relatif répond à $z'' = HA = h$.

24. Le cas de $\gamma = \gamma'$; $f = f$ comporte des réductions pareilles à celles du N.° 19; mais quand on fait séparément $\gamma' = 0$, ou $f = 0$, la quantité $\gamma + \Delta f z$ n'en subsiste pas moins dans l'équation (e): ce n'est donc que dans la double hypothèse $\gamma' = 0$, $f = 0$, ou $\gamma' = \gamma$, $f = f$, que la section AS de la plus grande poussée devient rectiligne. Mais, puisque, dans le second cas, la courbure de cette section ne tient qu'à l'existence de γ' et f, qui, lorsqu'il s'agit de la poussée des terres, sont de petites quantités par rapport à γ et f, il est à présumer que la substitution d'une ligne droite à la courbe AS n'écartera pas beaucoup de la vérité.

25. Les principes établis au commencement de cette note paraissent renfermer les véritables lois de l'équilibre des fluides imparfaits, et suffire pour déterminer en général les pressions que ces fluides exercent sur les parois des vases qui les contiennent.

Coulomb a aussi recherché la nature de la courbe AS, dans le cas où $\delta = 0$, $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$, $f = 0$; mais par la méthode que les premiers analystes ont employée pour résoudre les problèmes des isopérimètres et de la brachystochrône. Faute du principe (N.° 5) il sort de la supposition $f = 0$, et tombe dans l'hypothèse $f = f$; d'ailleurs, comme il ne s'est pas apperçu que la constante C d'intégration est nulle, la nature de la courbe AS, lui a échappé. Si dans l'équation qu'il a obtenue, on fait $B = 0$, $\frac{1}{n} = f$, $dx = -dx$, $y = z$, $dz = m\,dx$, ou si dans l'équation (e), on pose $\delta = 0$, $\gamma = \gamma' = 0$, $f = f$, on trouve également

$$m^2 + 2fm - \frac{1-f^2}{2} = 0,$$

équation à la ligne droite.

26 Supposons que la section AS de la plus grande poussée soit généralement rectiligne, et substituons dans l'expression

(2) de p, les valeurs $c=\frac{\gamma h}{\cos(\theta-\alpha)}$, $f=\cot\varphi$, $q=\frac{\Delta h^2 \sin\theta}{2\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)}$, nous aurons

$$p=\frac{\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\sin\theta\sin(\varphi+\alpha-\theta)-\gamma h\sin\varphi-c'\sin(\varphi-\theta)\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\varphi-\theta)\cos(\theta-\alpha)+f'\sin(\varphi-\theta)\cos(\theta-\alpha)}\;\ldots\ldots\;(24)$$

et en changeant les produits de sinus et cosinus, en cosinus linéaires; puis posant, pour abréger, $\varphi+\alpha-2\theta=u$.

$$p=\frac{\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\cos u-c'\sin u-\left[\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\cos(\varphi+\alpha)+2\gamma h\sin\varphi+c'\sin(\varphi-\alpha)\right.}{\cos u+f'\sin u+\cos(\varphi-\alpha)+f'\sin(\varphi-\alpha)}\ldots(25)$$

Pour abréger encore davantage, représentons par A et B respectivement, le terme du numérateur et celui du dénominateur, qui sont indépendants de la variable θ, et sans autre préparation, différencions par rapport à cette variable, nous trouverons tout de suite, pour la condition du maximum de p, l'équation (*)

$$\left(A+B\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\right)\sin u-(Af'-Bc')\cos u+c'+\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}f'=0\;\ldots\ldots\ldots\;(26)$$

dans laquelle $\tan 2\theta$ ne monterait à la vérité qu'au second degré, mais dont le développement serait par trop compliqué.

On en conclut qu'en général la valeur de θ, qui rend p un maximum, varie avec la hauteur h: pour connaître la hauteur h, sous laquelle la plus grande poussée est un minimum, il faut égaler à zéro le coëfficient $\frac{dp}{dh}$ et en se servant de l'expression (24), on obtient tout de suite (**)

$$h_1=\frac{\gamma\sin\varphi\cos\alpha}{\Delta\sin\theta\sin(\varphi+\alpha-\theta)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(27)$$

pour déterminer la hauteur h' sous laquelle la plus grande poussée devient nulle, il suffit d'égaler à zéro le numérateur de la même expression (24), ce qui donne,

$$\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\sin\theta\sin(\varphi+\alpha-\theta)-\gamma h\sin\varphi-c'\sin(\varphi-\theta)\cos(\theta-\alpha)=0;\;\ldots\;(28)$$

(*) Ce procédé s'applique avec le même succès à l'expression (8), de la note I sur la poussée des terres (Mémorial de l'Officier du Génie, N.° 4, page 212) et dispense de ces transformations si prolixes, par lesquelles l'expression est préparée à la différenciation, qui sont tout-à-fait superflues et deviendraient impraticables dans le cas présent.

(**) Il faudrait différencier l'expression (24), par rapport à h et à θ qui est une fonction de h, déterminée par l'équation (26); mais en vertu de cette équation même, la seconde partie de la différentielle serait nulle.

les hauteurs cherchées et les valeurs de θ, qui y répondent résulteront de l'équation (26) combinée successivement avec l'une et l'autre équation (27) et (28).

Si c' est nul sans que γ le soit, on a par l'équation (28)

$$h' = 2h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

il suit de là que dans ce cas la hauteur sous laquelle la plus grande poussée devient nulle est double de celle à laquelle répond le minimum de cette plus grande poussée. L'équation (28) revient à

$$\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha} \cos u = A,$$

comme on le voit par l'expression (25); substituons cette valeur de A dans l'équation (26), où les termes en c' doivent aussi être effacés, nous trouverons

$$\sin u\,(\cos u + f'\sin u + B) = 0;$$

Or, le second facteur est précisément le dénominateur de l'expression (25) dont le numérateur égalé à zéro a produit (28); c'est donc le premier facteur qui doit être employé à trouver l'angle θ' et la hauteur h' sous lesquels la plus grande poussée devient nulle; de sorte qu'on a uniquement

$$\theta' = \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

et par la substitution dans (29)

$$h' = \frac{2\gamma \sin\varphi \cos\alpha}{\Delta \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

quantité dont la moitié sera la hauteur relative au minimum de la plus grande poussée.

Lorsque γ est nul en même temps que c' l'équation (26) devient

$$\frac{\Delta h^2}{2\cos\alpha}\left\{[\cos(\varphi+\alpha) + B]\sin u - f'\cos(\varphi+\alpha)\cos u + f'\right\} = 0,$$

et la valeur de θ, qui rend p un maximum est indépendante de h; l'anéantissement de ce maximum donne réciproquement

$$h' = 0,$$

indépendamment de θ. On voit donc que dans ce cas non plus que dans le précédent l'équation (26) ne s'abaisse nullement; ce qui empêche de les appliquer à la pratique.

Il en est autrement dans l'hypothèse $c' = 0$, $f' = 0$, que γ soit nul ou non: l'équation (26) se réduit à

$$\sin u = 0,$$

et quel que soit h, reproduit la valeur (30) pour l'angle du prisme de la plus grande poussée P, dont on trouve alors cette expression,

$$P = \frac{\Delta h (h - h') \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)}{2 \cos \alpha \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

dans laquelle h' représente la valeur (31), qui est celle de la hauteur à laquelle répond $P = 0$; enfin, le minimum P_1 de P prend la valeur,

$$P_1 = - \frac{\gamma h' \sin \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

qui est essentiellement négative.

Maintenant, si l'on observe, d'une part, que le frottement f' des terres contre la maçonnerie et leur adhérence c' avec elle, sont beaucoup moindres que le frottement et la cohésion f, c des terres elles-mêmes; d'autre part, que les forces f', c' tendent non seulement à retenir les terres sur le plan de rupture, quel qu'il soit, mais encore à augmenter le moment du mur par rapport à l'arête extérieure de la base, on ne fera pas difficulté d'admettre que l'hypothèse $c' = 0$, $f' = 0$, tout à la fois favorable à la simplicité du calcul et avantageuse à la stabilité du revêtement, mérite la préférence dans la théorie comme dans la pratique.

Sur les N.os 18, 19 et 21.

(II). M.r de Prony (Recherches sur la poussée des terres, 1802) a assigné à l'intégrale (f), (N.o 18), les limites h' et h, qui ont été adoptées par la plupart de ceux qui depuis ont traité cette matière; jusque là il avait pris, à l'exemple de Coulomb, les limites 0 et h, qui sont indubitablement les véritables. En effet, de ce que, si la hauteur h n'excédait pas h', le prisme de terre se soutiendrait de lui-même, ou n'exercerait plus de pression contre le plan AB, il ne faut pas conclure que, si la hauteur h surpasse h', l'étendue de plan qui répond à h' ne sera pas pressée; car quelque peu que h surpasse h' ou que le nouveau prisme excède le premier, il tend à descendre, et, en vertu de la liaison que la cohésion établit entre sa partie inférieure et le premier prisme, celui-ci est entraîné et par conséquent la masse totale presse sur toute l'étendue du plan, qui répond à h (Note I, N.o 6). M.r Navier, dans son nouvel ouvrage (Application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des Machines) admet aussi les limites 0 et h; mais il en donne pour raison que, quoique la somme des pressions sur l'étendue de plan, relative à h', se réduise à zéro, néanmoins la somme des moments de ces pressions peut n'être pas nulle.

D'après cela, l'intégrale (f), prendra la valeur

$$M = \frac{1}{2}\delta h^2\left(\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h'\right)t^2;$$

et l'expression (g), (Nº 19), du bras de levier, par rapport au point A, deviendra

$$\frac{h\left(\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h'\right)}{(h-h')\cos\alpha},$$

qui se réduit à $\frac{1}{3}\frac{h}{\cos\alpha}$, quand $h'=0$.

Il en sera de ces quantités comme de la poussée P: elles cesseront d'avoir une existence réelle, quant à la question physique, lorsque, par l'infériorité de h, leurs valeurs deviendront négatives (Note I, Nº 6).

On pourra modifier les autres expressions du texte, en conséquen-ce de cette nouvelle détermination de M, qui sera subie aussi par le moment M' (Nº 21).

Fin.

Fig. 6.
Fig. 4.
Fig. 12.